

Föreläsning 6

Kapitel 7, sid 186-209

Jämförelse av två populationer

Agenda

- Jämförelse av medelvärden för två populationer
- Jämförelse av populationsandelar för två populationer
- Konfidensintervall och hypotesprövning
- Parvisa observationer

Exempel

- I ett medicinskt experiment sammankallade man 80 friska medelålders personer, som under tre månader fick pröva ett nytt medicinskt preparat. Syftet med studien var att utreda om preparatet ger förhöjt blodtryck som en biverkning. 40 av personerna fick preparatet, medan 40 fick placebo (ett verkningslöst preparat). Varken patient eller försöksledare visste under studietiden vem som fick vilket preparat (en så kallad *dubbelblind* studie). Varje person fick varje dag mäta sitt blodtryck, och efter tre månader sammanställdes informationen och räknades om till genomsnittligt blodtryck och standardavvikelse i respektive grupp.

Exempel

Grupp	Antal personer	Genomsnittligt blodtryck	Standardavvikelse
1 – Aktivt preparat	40	142.5	14.8
2 – Placebo	40	135.9	21.4

- Går det, på 95 procents konfidensnivå, att påvisa några skillnader i genomsnittligt blodtryck mellan personer som fick aktivt preparat och de som fick placebo?

Konfidensintervall (KI) för jämförelse av populationsmedelvärde ($\mu_1 - \mu_2$)

- Krav
 - de två stickproven är dragna som ett OSU
 - Samplingfördelningarna kan betraktas som normalfördelade

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n^*-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

- där n^* är den minsta av n_1 och n_2

Ensidigt KI för jämförelse av μ

- Nedåt begränsat:
$$\mu_1 - \mu_2 > (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{n^*-1;1-\alpha} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$
- Uppåt begränsat:
$$\mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{n^*-1;1-\alpha} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

KI för jämförelse av andelar i två populationer ($\pi_1 - \pi_2$)

- Krav
 - de två stickproven är dragna som ett OSU
 - $np(1 - p) > 5$ för båda stickproven

$$(p_1 - p_2) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Ensidigt KI för jämförande av π

- Nedåt begränsat: $\pi_1 - \pi_2 > (p_1 - p_2) - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$
- Uppåt begränsat: $\pi_1 - \pi_2 < (p_1 - p_2) + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

Exempel

- I utvärderingen av det nya preparatet (se tidigare exempel) så undersökte man även förekomsten av sömnsvärigheter.

Bland de 40 personerna som fått den aktiva substansen (grupp 1) uppgav 9 att de haft regelbundna sömnsvärigheter under studieperioden. Bland personerna i placebogruppern (grupp 2) var motsvarande siffra 6 personer.

Går det på 99% konfidensnivå att påvisa att andelen personer med sömnsvärigheter är större i gruppen som fått den aktiva substansen?

Hypotesprövning för jämförelser av μ

- Samma krav som för konfidensintervall
- Steg 1: Välj signifikansnivå och formulera hypoteser

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$

- där d_0 är den differens vi testat för, oftast 0

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 < d_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 > d_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$$

- valet av mothypotes bestäms av frågeställningen

Hypotesprövning för jämförelser av μ

- Steg 2: Bestäm testvariabeln

$$t_{test} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Hypotesprövning för jämförelser av μ

- Steg 3: Bestäm det kritiska området
 - Om $H_a: \mu_1 - \mu_2 < d_0$ ligger det kritiska området till vänster om det kritiska värdet $-t_{n^*-1;1-\alpha}$
 - Om $H_a: \mu_1 - \mu_2 > d_0$ ligger det kritiska området till höger om det kritiska värdet $t_{n^*-1;1-\alpha}$
 - Om $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$ har vi kritiska områden både till vänster och höger om de kritiska värdena $\pm t_{n^*-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ i respektive svans
 - Kom ihåg att n^* är den minsta av n_1 och n_2
 - Tips: Rita upp fördelningen och det kritiska området

Hypotesprövning för jämförelser av μ

- Steg 4: Ta beslut och tolka
 - Placera t_{test} på den fördelning som ritats
 - Om t_{test} hamnar i kritiska området \Rightarrow förkasta H_0

Exempel

Grupp	Antal personer	Genomsnittligt blodtryck	Standardavvikelse
1 – Aktivt preparat	40	142.5	14.8
2 – Placebo	40	135.9	21.4

- Går det, på 5% signifikansnivå, att påvisa att det genomsnittliga blodtrycket är högre i gruppen som fått aktivt preparat?

Hypotesprövning för jämförelser av π

- Krav: stickprovet draget som OSU och $np(1 - p) > 5$
- Steg 1: Hypoteser

$$H_0: \pi_1 - \pi_2 = d_0$$

$$H_a: \pi_1 - \pi_2 < d_0$$

$$H_a: \pi_1 - \pi_2 > d_0$$

$$H_a: \pi_1 - \pi_2 \neq d_0$$

Hypotesprövning för jämförelser av π

- Steg 2: Bestäm testvariabeln

$$z_{test} = \frac{(p_1 - p_2) - d_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{p_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{p_2}}}$$

Hypotesprövning för jämförelser av π

- Steg 3: Bestäm det kritiska området
 - Om $H_a: \pi_1 - \pi_2 < d_0$ ligger det kritiska området till vänster om det kritiska värdet $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$
 - Om $H_a: \pi_1 - \pi_2 > d_0$ ligger det kritiska området till höger om det kritiska värdet $z_{1-\alpha}$
 - Om $H_a: \pi_1 - \pi_2 \neq d_0$ har vi kritiska områden både till vänster och höger om de kritiska värdena $\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ i respektive svans
 - Tips: Rita upp fördelningen och kritiska området

Hypotesprövning för jämförelser av π

- Steg 4: Ta beslut och tolka
 - Om z_{test} hamnar i kritiska området \Rightarrow förkasta H_0

Alternativt

- Steg 3 och 4 kan bytas ut med p-värdesmetoden
 - Om $p\text{-värdet} < \alpha \Rightarrow$ förkasta H_0

Exempel

Sämre prognos för män med bröstcancer

Bland män som insjuknar i bröstcancer är överlevnaden betydligt lägre än för kvinnor, enligt en studie vid Akademiska sjukhuset i Uppsala. 99 män med bröstcancer följdes under 15 år och jämfördes med 369 kvinnliga bröstcancerpatienter. Fem år efter diagnosen levde 55 procent av kvinnorna men bara 41 procent av männen.

Östgöta Correspondenten, torsdag 27 oktober 2011

- På vilken signifikansnivå har forskarna kunnat dra denna slutsats?

Parvisa observationer

- Om samma enhet undersöks vid två olika tillfällen uppfylls inte kravet på oberoende mellan stickproven
 - Vanligtvis garanteras detta om man drar två OSU

Exempel

- Vattenplaning är en stor trafikfara, och av stor betydelse är bildäckens förmåga att pressa undan vatten. För att undersöka **vid vilken hastighet vattenplaning uppnås** vid ett kontrollerat experiment på en vattenfylld bana provades två däcktyper: en med traditionellt däckmönster och en med ett nyutvecklade mönster skapat just för att tränga undan vatten. Varje typ av däck provades på 10 typer av bilar eftersom bilens tyngd och aerodynamiska egenskaper också kan påverka vid vilken hastighet vattenplaning uppnås. Följande resultat erhöles.

Deltagare	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Traditionellt	59	98	62	102	61	115	77	95	74	83
Nytt	64	103	77	99	59	115	79	89	68	85

Exempel

- Är det nya mönstret bättre, sett till vid vilken hastighet vattenplaning uppnås (det är givetvis önskvärt att man ska kunna köra så fort som möjligt utan att få vattenplaning), jämfört med det traditionella mönstret? Utred frågeställningen på 5% signifikansnivå. Vilka antaganden måste göras för att metodiken ska vara tillämpbar?

Exempel

- Skapa en ny variabel som visar differensen!

Deltagare	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Traditionellt	59	98	62	102	61	115	77	95	74	83
Nytt	64	103	77	99	59	115	79	89	68	85
DIFFERENS	-5	-5	-5	3	2	0	-2	6	6	-2

- Betrakta den nya variabeln som en grupp och använd metoder för inferens om en population

Relation mellan hypotesprövning och KI

- Om d_0 ingår i intervallet som skattats kan H_0 ej förkastas
- Vid $H_a: <$ beräknas ett uppåt begränsat KI
- Vid $H_a: >$ beräknas ett nedåt begränsat KI
- Vid $H_a: \neq$ beräknas ett dubbelsidigt KI