Föreläsning 2

Kapitel 3, sid 47-78

Sannolikhetsteori

LINKÖPING UNIVERSITY

Agenda

- Mängdlära
- Kombinatorik
- Sannolikhetslära

Mängdlära

- Används för att hantera sannolikheter
- Viktig byggsten inom matematik och logik
- Utfallsrummet, S, är samtliga möjliga utfall vid ett experiment
- Ex: Kasta en tärning:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Mängdlära

- Varje del av S kallas för element

- Ex: Låt
  $$A = händelsen\ udda\ \text{ö}gon\ på\ tärningen$$
  $$B = händelsen\ högst\ 3\ \text{ö}gon\ på\ tärningen$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$

- Om mängden A ingår i S är A en delmängd av S, vilket betecknas $A \epsilon S$

Snitt och union

- Låt A och B vara två delmängder av S
- Snitt:
  - Är de element som tillhör <u>både A och B</u>

$$A \cap B$$

- Union:
  - Är de element som tillhör <u>A eller B (eller båda)</u>

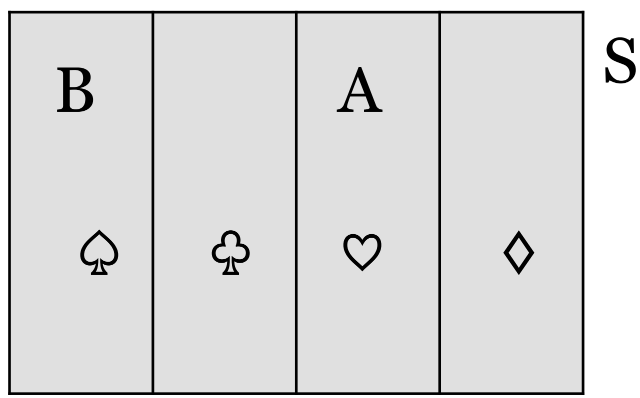
$$A \cup B$$

Disjunkta händelser

- Händelser som <u>inte</u> har ett snitt

- Ex: Dra kort ur en kortlek. Låt:

$$A = kortet\ \text{är}\ en\ hj\ddot{a}rter$$
$$B = korter\ \text{är}\ en\ spader$$



Oberoende händelser

- Definieras som att sannolikheten för en händelse inte påverkas av att en annan händelse redan inträffat eller inte

- Går inte att visualisera i Venndiagram

- Ex: Kasta en tärning. Låt:

$$A = 6 \text{ ö}gon\ upp\ p\text{å}\ f\text{ö}rsta\ kastet$$
$$B = 6 \text{ ö}gon\ upp\ p\text{å}\ andra\ kastet$$

Händelserna är oberoende för de påverkar inte varandra

- Disjunkta händelser är <u>inte</u> oberoende!

Kombinatorik

- Gren inom matematiken som handlar om att *beräkna på hur många sätt ett givet antal element kan ordnas i mängder*
- Olika metoder
  - Multiplikationsprincipen
  - Permutationer när alla element är olika
  - Permutationer när vissa element är lika
  - Kombinationer utan upprepning
  - Kombinationer vid upprepning

Multiplikationsprincipen

- Ex: Framför oss har vi fyra kulor i olika färger. En röd, en **svart**, en blå och en grön. Vi väljer en, markerar färgen på den, lägger tillbaka den (kallas **med återläggning**). Detta upprepas k gånger.
- På hur många sätt kan detta experiment utföras?

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = n^k$$

- Visualiseras ofta i ett träddiagram

Permutationer när alla element är olika

- Ex: Samma fyra kulor ligger framför oss. Vi väljer **utan återläggning** två kulor. På hur många sätt kan detta göras, *om ordningen spelar roll*?

Hur många sätt kan man välja k element från n stycken

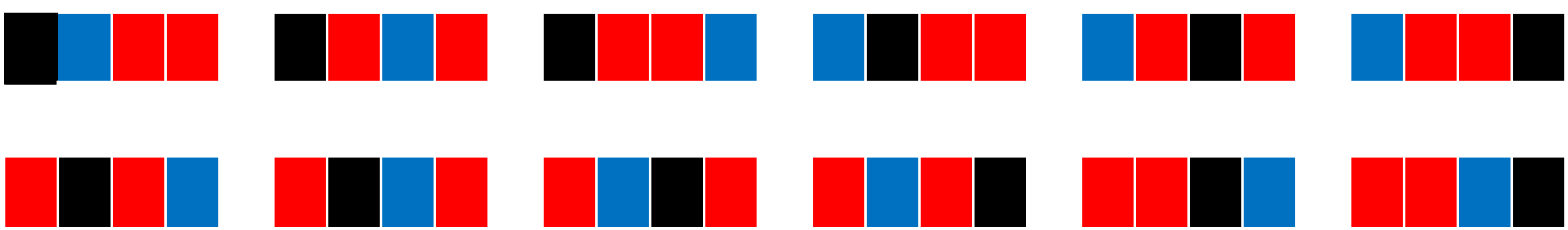
$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutationer när vissa element är lika

- Ex: Fyra kulor ligger framför oss. En **svart**, en blå och två röda. På hur många sätt kan vi **utan återläggning** välja ut alla fyra kulorna, *om ordningen spelar roll*?

- Totalt n element, där k_g är antalet element i grupp g

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$$



Kombinationer utan återläggning

- Ex: Fyra kulor ligger framför oss. En röd, en **svart**, en blå och en grön. Vi väljer **utan återläggning** två kulor. På hur många sätt kan detta göras, *om ordningen inte spelar roll*?

Hur många sätt kan man välja k element från n stycken

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Kombinationer med återläggning

- Ex: Fyra kulor ligger framför oss. En röd, en **svart**, en blå och en grön. Vi väljer **med återläggning** två kulor. På hur många sätt kan detta göras, *om ordningen inte spelar roll*?

$$C'^{k}_{n} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Permutationer och kombinationer

- *Utan återläggning* och *med hänsyn till ordningen:*
  Permutationer när alla element är olika
- *Utan återläggning* och *med hänsyn till ordningen*, vissa element ej åtskiljbara:
  Permutationer när vissa element är olika
- *Utan återläggning* och *utan att ordningsföljden har betydelse*:
  Kombinationer utan upprepning
- *Med återläggning* och *utan att ordningsföljden har betydelse*:
  Kombinationer vid upprepning

Permutationer används när ordningsföljden har betydelse!

Introduktion till sannolikhetslära

- Område inom statistik där vi studerar experiment som beror på slumpen

- Sannolikhet är ett värde mellan 0 och 1 som säger hur trolig händelsen är

- Ex: Sannolikheten för händelse A

$$\Pr(A)$$

Regler för sannolikheter

1. En sannolikhet ligger **alltid** mellan 0 och 1

2. Sannolikheten för alla disjunkta händelser i S kommer tillsammans summera till 1

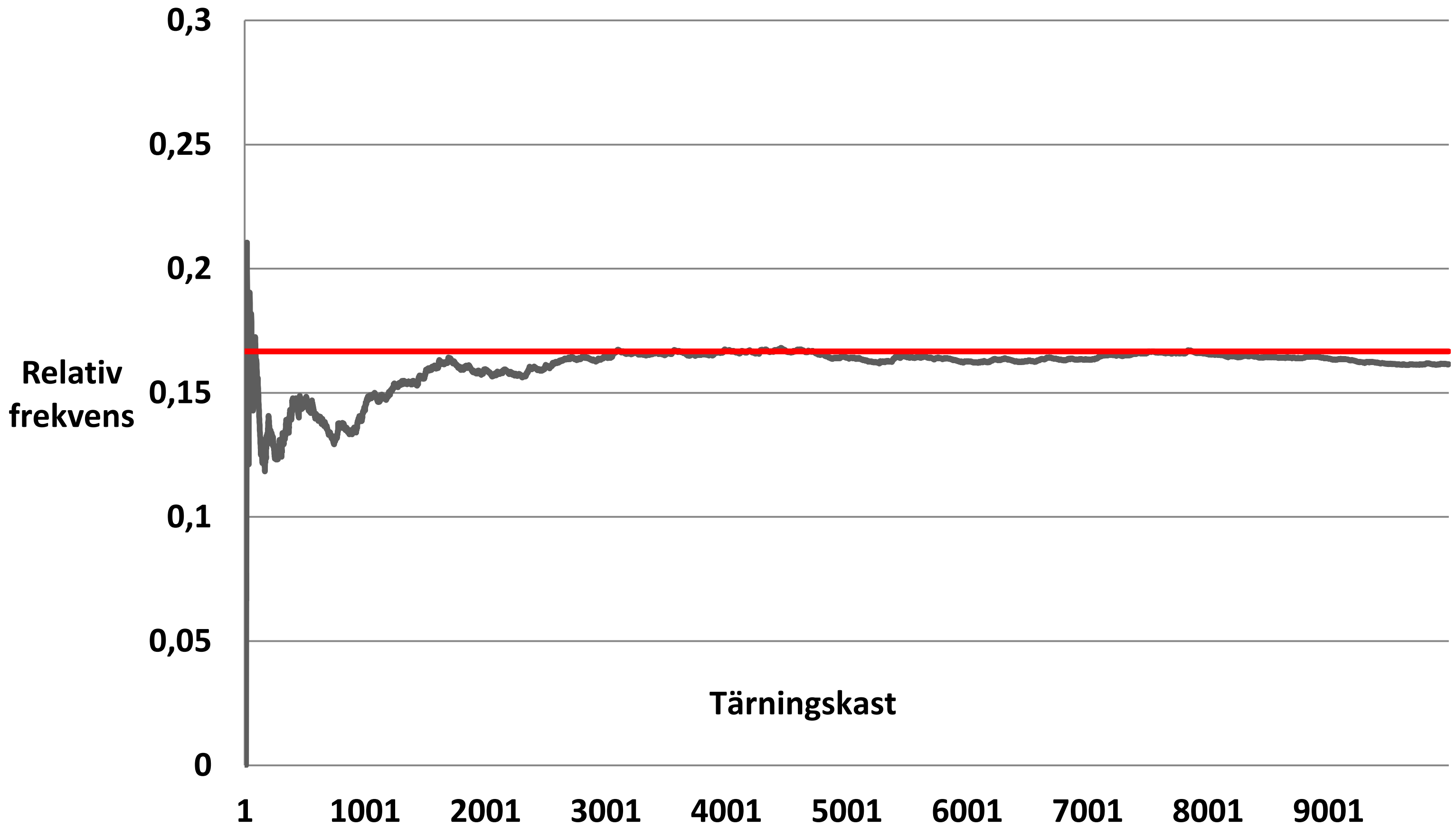
3. Om vi vet sannolikheten för A, $\Pr(A)$, så är sannolikheten att A **inte** inträffar $1 - \Pr(A)$

Den klassiska sannolikhetsdefinitionen

$$\Pr(A) = \frac{antalet\ gynnsamma\ utfall}{totala\ antalet\ utfall}$$

- Ex: Tio kulor i olika färger ligger framför oss, varav en är blå. Vi väljer **utan återläggning** två kulor. Vad är sannolikheten att en av dem är blå?

Relativ frekvens – tolkning av sannolikhet



Additionssatsen för disjunkta händelser

- Om A och B **är disjunkta** gäller

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

- Ex: Dra ett kort ur en kortlek. Vad är sannolikheten att kortet är ett hjärter eller ett spader?

$$\Pr(Hjärter) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(Spader) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(Hjärter\ eller\ Spader) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Additionssatsen för icke-disjunkta händelser

- Om A och B **inte är disjunkta** gäller

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

- Ex: Vi drar ett kort ur en kortlek. Vad är sannolikheten att kortet är en hjärter eller en sjua?

$$\Pr(Hjärter) = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(Sjua) = \frac{1}{13}$$

$$\Pr(Hjärter\ eller\ Sjua) = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

Multiplikationssatsen för oberoende händelser

- Om A och B **är oberoende** gäller

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) * \Pr(B)$$

- Ex: Vi singlar slant två gånger. Vad är sannolikheten för två krona i rad?

$$\Pr(Första\ krona) = \Pr(Andra\ krona) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(Första\ och\ andra\ krona) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Betingad sannolikhet

- Sannolikheten för händelse A givet att händelse B redan inträffat

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

- Ex: Vi drar ett kort och ser att den är röd. Vad är sannolikheten att kortet är ett ess?

$$\Pr(R\ddot{o}d) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(Ess) = \frac{1}{13}$$

Betingad sannolikhet

$$\Pr(Röd \cap Ess) = \frac{1}{26}$$

$$\Pr(Ess|Röd) = \frac{\frac{1}{26}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{13}$$

- Om $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ eller $\Pr(B|A) = \Pr(B)$ så är händelserna oberoende

Multiplikationssatsen för beroende händelser

- Om A och B **är beroende** gäller

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B|A) = \Pr(B) \cdot \Pr(A|B) = \Pr(B \cap A)$$

- Ex: En skål innehåller 10 röda och 5 blå kulor. Vi väljer slumpmässigt och utan återläggning 2 kulor. Vad är sannolikheten för att bägge är blå?

$$\Pr(Första\ blå) = \frac{5}{15}$$

$$\Pr(Andra\ blå|Första\ blå) = \frac{4}{14}$$

Multiplikationssatsen för beroende händelser

$$\Pr(\textit{Första} \cap \textit{Andra}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

Lagen om total sannolikhet

- Om $A_1, \dots, A_g$ är g st parvis disjunkta händelser, vars union bildar hela utfallsrummet, blir:

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{g} \Pr(A_i) \cdot \Pr(B|A_i)$$

- Ex: Sannolikheten att drabbas as strupcancer är 5% för rökare och 0,1% för icke-rökare. 14% av befolkningen röker. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald person drabbas av strupcancer?

Bayes sats

- Om $A_1, \dots, A_g$ är g parvis disjunkta händelser, vars union bildar hela utfallsrummet, blir:

$$\Pr\left(A_j \middle| B\right) = \frac{\Pr\left(A_j\right) \cdot \Pr\left(B \middle| A_j\right)}{\Pr(B)}$$

Där $\Pr(B) = \sum_{i=1}^{g} \Pr(A_i) \cdot \Pr(B|A_i)$

- Ex (fortsättning): Hur stor andel av dem som drabbas av strupcancer är rökare?