

Tentamen

Tid: 8-12

Tillåtna hjälpmedel: ett dubbelsidigt handskrivet A4 med anteckningar.
formel- och tabellsamling (delas ut med tentamen).
räknedosa av valfri modell.

Jourhavande lärare: Sarah Walid Alsaadi, telefon 013-284647

Betygsgränser: Tentamen omfattar totalt 20p.
Väl godkänt: 16p.
Godkänt: 12p.

- Siffrorna i uppgifterna är påhittade.
 - Redovisa och motivera tydligt alla dina lösningar!
-

1. Under en inventering av fåglar uppmättes vikten hos ett stickprov om 9 slumpmässigt påträffade koltrastar, med följande resultat (i gram):

104, 93, 99, 118, 80, 85, 110, 117, 86.

- (a) Beräkna medelvärde och standardavvikelse för datamaterialet.

2p.

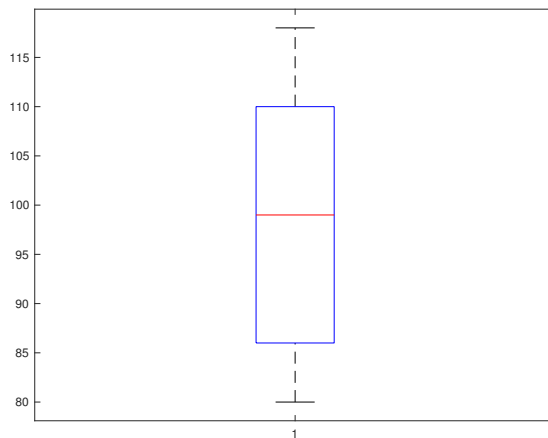
Lösning: Använd formlerna för stickprov

$$\bar{x} = \frac{104 + 93 + \dots + 86}{9} = 99.11$$
$$s = \sqrt{\frac{(104 - 99.11)^2 + \dots + (86 - 99.11)^2}{8}} = 14.11.$$

- (b) Visualisera datamaterialet som ett lådagram.

2p.

Lösning: Sortera data materialet och välj ut det mittersta värdet som medianen = 99. Det mittersta värdet av de minsta fem värdena är kvartil 1 = 86. Det mittersta värdet av de fem största är kvartil 3 = 110. Det största värdet är 118 och det minsta är 80.



2. Antalet fordon, räknat i tusental, som passerar Öresundsbron under ett dygn har observerats under en längre tid och medelvärdet har uppmätts till 19,6 och variansen till 7,3.

(a) Varje fordon som passerar bron betalar en broavgift på 300 SEK. Beräkna väntevärde och standardavvikelse för den totala intäkten som broavgifterna genererar under ett slumpmässigt valt dygn.

2p.

Lösning: Låt X vara antalet fordon som passerar på en dag och låt Y vara den totala intäkten. $Y = 300X$. Regler för linjära variabeltransformer ger

$$\begin{aligned} E(Y) &= 300E(X) = 5880 \\ Var(Y) &= 300^2 Var(X) = 300^2 \cdot 7.3 = 657000 \\ Std(Y) &= \sqrt{Var(Y)} = 810.56. \end{aligned}$$

Väntevärdet för den totala intäkten är 5,88 miljoner SEK och standardavvikelsen är 0,81 miljoner SEK.

(b) Vad är sannolikheten att minst en miljon fordon passerar bron under en 50-dagarsperiod?

3p.

Lösning: Centrala gränsvärdessatsen ger att summan av antalet passerande under 50 dagar är approximativt normalfördelat.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{50} X_i &\approx N\left(\mu = 50 \cdot 19.6 = 980; \sigma = \sqrt{50 \cdot 7.3} = 19.1\right) \\ z &= \frac{1000 - 980}{19.1} = 1.05 \\ Pr(Z > 1.05) &= 1 - Pr(Z < 1.05) \stackrel{tabell}{=} 0.147. \end{aligned}$$

Sannolikheten är 0,147.

3. I en enkätstudie undersöktes svenskars inställning till elbilar och biogasbilar. Frågorna som ställdes var "Skulle ert hushålls nästa bilköp kunna vara en elbil?" och "Skulle ert hushålls nästa bilköp kunna vara en biogasbil?" och svarsalternativen var "Ja" och "Nej" i båda fallen. Enkäten skickades ut till 500 personer och följande 384 svar erhöles från personer med giltigt körkort

	Positiva till elbil	Negativa till elbil
Positiva till biogasbil	112	9
Negativa till biogasbil	45	218

- (a) Bestäm ett nedåt begränsat 95-procentigt konfidensintervall för andelen svenskar med körkort som är positivt inställda till att köpa elbil. Tolka intervallet i ord. 3p.

Lösning: Summera först rader och kolumner i tabellen

	Positiva till elbil	Negativa till elbil	Totalt
Positiva till biogasbil	112	9	121
Negativa till biogasbil	45	218	263
Totalt	157	227	384

Vi studerar enbart nedersta raden. $n = 384$. $p = 157/384 = 0.4089$. Kraven är uppfyllda pga av OSU och $n \cdot p \cdot (1 - p) > 5$. 95-procentigt KI:

$$\pi > 0.4089 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.3676.$$

Andelen av svenskar med körkort som är positiva till elbilsköp är större än 36,8% med 95-procentig säkerhet.

- (b) Utred på 1-procentig signifikansnivå om det finns något samband mellan att vara positivt inställd till elbil respektive biogasbil. Formulera en slutsats i ord. 3p.

Lösning: Vi gör detta med ett χ^2 -test för korstabell. Förväntade frekvenser enligt $E_i = \text{radtot} \cdot \text{koltot} / \text{tottot}$:

	Positiva till elbil	Negativa till elbil
Positiva till biogasbil	49.47	71.53
Negativa till biogasbil	107.53	155.47

Kraven för χ^2 -test är uppfyllda pga OSU och alla E_i större än 5.

$$\chi_{test}^2 = \frac{(112 - 49.47)^2}{49.47} + \dots + \frac{(218 - 155.47)^2}{155.47} = 195.2$$

$$\chi_{krit}^2 = \chi_{1;0.01}^2 \stackrel{\text{tabell}}{=} 6.635.$$

Eftersom testvariabeln hamnar i det kritiska området kan nollhypotesen att det inte finns något samband mellan att vara positivt inställd till elbil respektive biogasbil förkastas på 1-procentig signifikansnivå.

4. I tennis har en spelare två försök på sig att serva, det vill säga att sätta igång spelet. Om den första serven misslyckas får spelaren serva en andra gång och om även den andra serven misslyckas gör spelaren ett så kallat dubbelfel och förlorar poängen. Tennisspelaren Roger har som strategi att lägga en hård första serve och om denna misslyckas lägger han en säker andra serve. Sannolikheten att Roger lyckas med sin första serve är 63 % och om denna misslyckas är sannolikheten att han lyckas med sin andra serve 96 %.

- (a) Vad är sannolikheten att Roger gör dubbelfel? Anta att utfallen av servarna kan ses som oberoende. 2p.

Lösning: Låt

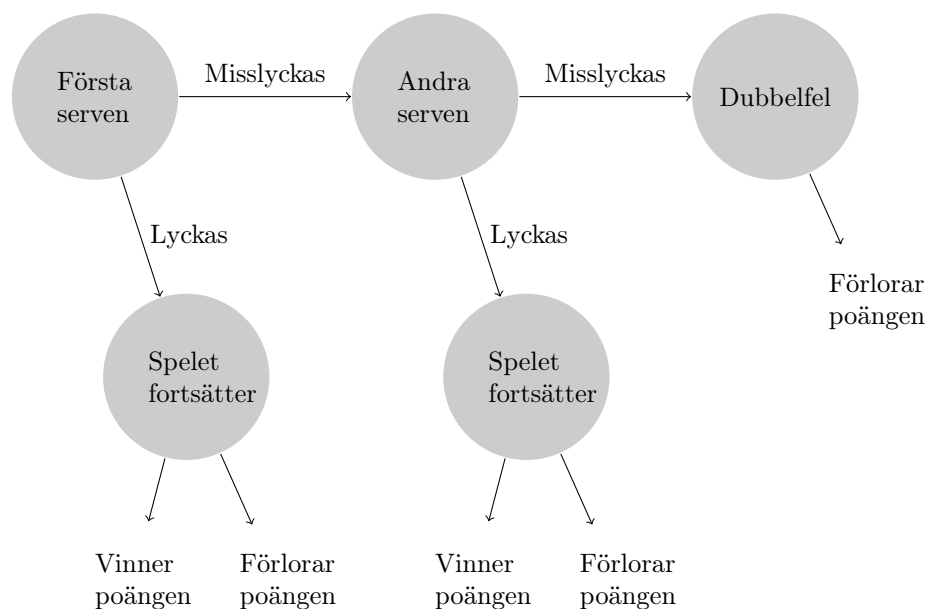
A – första serven lyckas
 B – andra serven lyckas
 C – poängen vinnas
 D – dubbelfel.

$Pr(A) = 0.63$. $Pr(B) = 0.96$. Multiplikationssatsen för oberoende händelser ger

$$Pr(D) = Pr(A^c \cap B^c) = Pr(A^c) \cdot Pr(B^c) = (1 - 0.63)(1 - 0.96) = 0.0148.$$

- (b) Om den första eller andra serven lyckas så fortsätter spelet tills dess att en av de två spelarna vinner poängen. Givet att den första serven lyckas så är sannolikheten 77 % att Roger vinner poängen och givet att den andra serven lyckas så är sannolikheten 57 % att Roger vinner poängen. Vad är sannolikheten att Roger vinner poängen när han sätter igång spelet?

3p.



Lösning: $Pr(C|A) = 0.77$. $Pr(C|B) = 0.57$. Lagen om total sannolikhet ger

$$\begin{aligned}
 Pr(C) &= Pr(C|A) \cdot Pr(A) + Pr(C|B \cap A^c) \cdot Pr(B) \cdot Pr(A^c) \\
 &= 0.77 \cdot 0.63 + 0.57 \cdot 0.96 \cdot 0.37 = 0.6876.
 \end{aligned}$$

LYCKA TILL!

PER