Sannolikhetslära

Marco Kuhlmann

Detta är en kompakt sammanfattning av momentet ”sannolikhetslära” som ingår i kurserna Matematik 1b och 1c på gymnasiet. I slutet av dokumentet hittar du uppgifter med vilka du kan testa om du behöver repetera delar av momentet.

1 Grundläggande begrepp

1.01 När vi singlar slant eller kastar tärning kan vi inte med säkerhet förutsäga resultatet. Singla slant och kast med tärning är exempel på **slumpförsök**.

1.02 Ett möjligt resultat vid ett slumpförsök kallas **utfall**. När man singlar slant finns det två möjliga utfall: krona och klave. Vid kast med tärning finns det sex möjliga utfall: etta, tvåa, trea, fyra, femma och sexa. Mängden av alla möjliga utfall vid ett slumpförsök kallas försökets **utfallsrum** och betecknas med den grekiska bokstaven Ω (omega).

1.03 En **händelse** är en mängd möjliga utfall. Händelsen ”jämt antal prickar” vid kast med tärning inträffar när man slår en tvåa, fyra eller sexa; händelsen består alltså av tre stycken utfall.

1.04 Mängden Ω, som innehåller alla möjliga utfall vid ett slumpförsök, representerar händelsen som *alltid* inträffar. Den tomma mängden representerar händelsen som *aldrig* inträffar.

1.05 Notationen $P(A)$ betecknar **sannolikheten** (eng. *probability*) för händelsen A. En sannolikhet kan anges i bråkform ($\frac{1}{2}$), decimalform (0,5) eller procentform (50%). Ibland säger vi *chans* eller *risk* istället för *sannolikhet*, t.ex. ”Risken för att insjukna i bakteriell meningit är 0,003%”.

1.06 **Kolmogorov-axiomen.** Sannolikheter lyder under nedanstående regler:

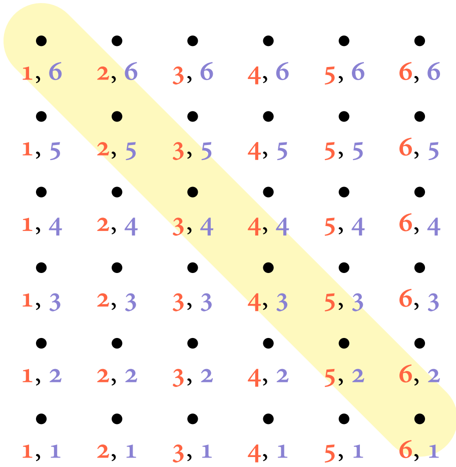
(1) För varje händelse A gäller att $P(A)$ är ett reellt tal mellan 0 och 1.

(2) För hela utfallsrummet Ω gäller att $P(\Omega) = 1$.

(3) För händelser A, B som inte kan inträffa samtidigt gäller att $P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B)$.

2 Likformiga sannolikhetsfördelningar

2.01 När alla utfall av ett slumpförsök har samma sannolikhet, säger man att man har en **likformig sannolikhetsfördelning**. Singla slant och kast med tärning är exempel på slumpförsök med likformig sannolikhetsfördelning.



Figur 1: Kast med två tärningar, en röd och en lila. Utfallet 5, 4 betyder att den röda tärningen visar en femma och den lila tärningen visar en fyra. Punkterna på diagonalen representerar händelsen ”poängsumman lika med 7”.

2.02 När man har en likformig sannolikhetsfördelning (och bara då!) beskrivs sannolikheten för en händelse A av den så kallade **klassiska sannolikhetsmodellen**:

$$P(A) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antalet möjliga utfall}} = \frac{\text{antalet utfall i } A}{\text{antalet utfall i } \Omega}$$

Vid kast med tärning finns det sex möjliga utfall. Sannolikheten för händelsen ”sexa” (ett gynnsamt utfall) är $\frac{1}{6}$; sannolikheten för ”jämt antal prickar” (tre gynsamma utfall) är $\frac{1}{3}$.

2.03 Sannolikheten för händelsen som alltid inträffar är 1; för denna händelse är antalet gynnsamma utfall samma som antalet möjliga utfall. Sannolikheten för händelsen som aldrig inträffar är 0; för denna händelse är antalet gynnsamma utfall lika med noll.

2.04 Likformiga sannolikhetsfördelningar kan presenteras med **utfallsdiagram** som i figur 1. Detta diagram visar alla möjliga utfall för slumpförsöket ”kast med två tärningar”. Ur diagrammet kan vi läsa av sannolikheten för händelser som t.ex. ”poängsumman lika med 7” ($\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$).

3 Sannolikhet som relativ frekvens

3.01 Vi gör upprepade kast med en tärning. Vid utvalda tidpunkter räknar vi ut den **relativa frekvensen** av sexor, dvs. kvoten mellan antalet sexor (den absoluta frekvensen) och antalet kast. Resultaten visas i tabell 1. Som vi kan se stabiliserar sig den relativa frekvensen kring den teoretiska sannolikheten för händelsen ”sexa”, $\frac{1}{6}$ (figur 2).

antal kast	n	10	50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000
antal sexor	f	1	8	17	98	179	818	1 688	8 308
relativ frekvens	f/n	0,100	0,160	0,170	0,196	0,179	0,164	0,169	0,166

Tabell 1: Relativ frekvens av sexor vid upprepade kast med en tärning

3.02 **De stora talens lag.** Den relativa frekvensen för en händelse närmar sig sannolikheten för händelsen när antalet slumpförsök ökar.

3.03 Det finns många situationer där man inte på förhand kan bestämma sannolikheten för en viss händelse; detta gäller i synnerhet när sannolikhetsfördelningen inte är likformig. I dessa fall kan man använda De stora talens lag och ta den relativa frekvensen för händelsen vid ett stort antal slumpförsök som närmevärde för sannolikheten.

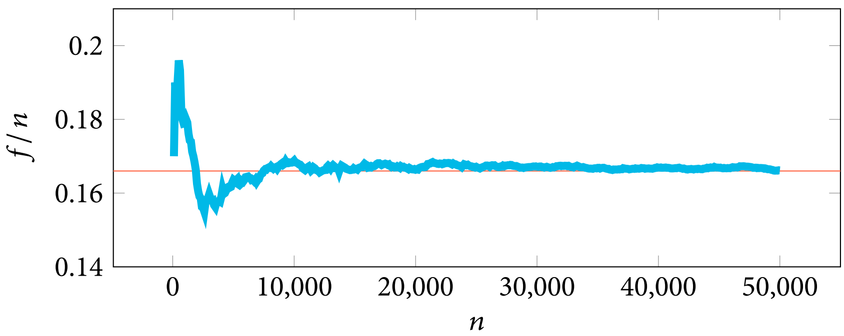
4 Slumpförsök i flera steg

4.01 När vi kastar tärning två gånger, så är det rimligt att anta att sannolikheten för händelsen ”jämnt antal prickar” vid första kastet inte påverka sannolikheten för samma händelse vid andra kastet. Vi kan därför betraktar de två händelser som **oberoende**.

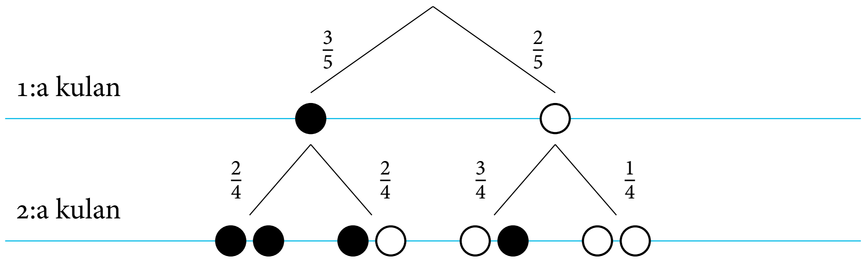
4.02 **Produktregeln** säger att sannolikheten för att två oberoende händelser A och B ska inträffa är produkten av de enskilda händelsernas sannolikheter:

$$P(A \text{ och } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Produktregeln gäller även för fler än två händelser, under förutsättningen att alla dessa händelser är ömsesidigt oberoende.



Figur 2: Relativ frekvens (f/n) av sexor vid n kast med tärning. Den relativa frekvensen stabiliserar sig kring den teoretiska sannolikheten $\frac{1}{6}$ (orange linje).



Figur 3: Vi drar två kulor ur en burk som i början innehåller tre svarta kulor och två vita kulor. De fyra grenarna längst ned representerar de möjliga utfallen, dvs. ”två svarta kulor”, ”svart kula först, sedan vit kula”, ”vit kula först, sedan svart kula”, ”två vita kulor”.

4.03 Att två händelser är **beroende** innebär att inträffandet av den ena påverkar sannolikheten för den andra. Exempel: Vi har en påse med fem kulor, tre svarta och två vita. Vi drar två kulor ur påsen. Sannolikheten för vilken färg den andra kulan har beror på vilken färg den första kulan hade. Ett slumpförsök i flera steg som detta kan illustreras som i figur 3.

4.04 Diagrammet i figur 3 är ett exempel på ett **träddiagram**. I ett träddiagram representerar varje nivå ett steg i slumpförsöket, och varje gren ett möjligt utfall.

4.05 **Räkneregler för träddiagram.**

(1) Sannolikheten för en gren (ett utfall) i ett träddiagram är lika med produkten av sannolikheterna längs grenen.

(2) Sannolikheten för en händelse är summan av sannolikheterna för de olika grenarna (utfallen) i ett träddiagram som ingår i händelsen.

4.06 **Dragning med återläggning** syftar på slumpförsök i flera steg med oberoende händelser, som t.ex. att dra kulor ur en burk och lägga tillbaka kulorna efter varje dragning, eller att kasta flera tärningar i följd. Sådana slumpförsök kan visualiseras både med utfallsdiagram (figur 1) och med träddiagram (figur 3).

4.07 **Dragning utan återläggning** syftar på slumpförsök i flera steg med beroende händelser, som t.ex. att dra kulor ur en burk utan att lägga tillbaka dem. Sådana slumpförsök kan visualiseras med träddiagram (figur 3).

5 Komplementhändelse

5.01 För två händelser A och B som inte kan inträffa tillsammans (dvs. som inte har några gemensamma utfall) men som tillsammans utgör hela utfallsrummet gäller $P(A) + P(B) = 1$. Händelserna *kompletterar* varandra. Händelsen B kallas därför **komplementhändelsen** till händelsen A (och vice versa) och vi skriver $B = A^c$. För komplementhändelser gäller:

$$P(A^c) = 1 - P(A)\,.$$

Diagnos

D.01 En burk innehåller fem vita och tre svarta kulor. Du tar slumpvis en kula ur burken. Hur stor är sannolikheten att du får en (a) vit kula, (b) svart kula?

D.02 Du singlar slant. Hur många möjliga utfall finns det? Hur stor är sannolikheten för ”krona”? Ungefär hur många gånger på 1 000 kast bör du få ”krona”?

D.03 Du kastar tärning. Hur stor är sannolikheten att du får ett jämnt antal prickar? Hur många gånger kan du förvänta dig att få ett jämnt antal prickar om du kastar tärning 120 gånger?

D.04 I ett lotteri finns 500 lotter. Sannolikheten att få en vinstlott är 0,05%. (a) Hur många vinstlotter finns det? (b) Hur många nitlotter finns det? (c) Hur många vinster är det sannolikt att du får om du köper 40 lotter?

D.05 Du kastar en tärning fem gånger och får en sexa varje gång. (a) Hur stor är sannolikheten att du får en sexa även i nästa kast? (b) Hur stor är sannolikheten att du får en etta i nästa kast?

D.06 Du drar två kort ur en kortlek. (a) Vad är sannolikheten att det första kortet är hjärter? (b) Anta att det första kortet är hjärter. Vad är då sannolikheten att även det andra kortet är hjärter? (c) Vad är sannolikheten att båda kort är hjärter?

D.07 **Monty Hall-problemet.** Du presenteras tre stängda dörrar – bakom en finns en bil, och bakom de två andra finns två getter. Du blir ombedd att välja en dörr; men du ska inte öppna den än. Monty Hall, som vet var bilen finns, öppnar istället en av de två resterande dörrarna och visar att denna dörr döljer en get. Han frågar dig därefter om du vill hålla fast vid ditt val eller byta till den andra oöppnade dörren. Hur förändras dina vinstchanser om du byter?

D.08 Vad är sannolikheten att minst två personer i klassen fyller år på samma dag? Ledtråd: Denna uppgift kan lösas med hjälp av komplementhändelse.