

■

729G78 Artificiell intelligens

Probabilistisk logik

Arne Jönsson

HCS/IDA

Probabilistiska resonemang

- Osäkerhet
- Grundläggande sannolikhetslära
 - Stokastiska variabler
 - Bayes' teorem
- Bayesianiska nätverk
 - Konstruktion
 - Inferens
- HMM

Osäkerhet

- Agenten har nästan aldrig tillgång till hela sanningen om omgivningen
 - Ofullständig eller felaktig förståelse av världen, jfr qualification problem
- Exempel:
 - Mål: cykla hem efter jobbet
 - Om inte: Jag måste jobba, Jag blir bortbjuden, Cykeln stulen eller punkterad, Huset brunnit ner, Jag blir bortrövad etc etc
- Kan mildra målet: komma hem nångång
- Eller resurserna: jag sticker nu innan jag blir bortrövad och cykeln stulen
- Rationella beslut fattade baserat på hur viktigt målet är jämfört med den kostnad det innebär att nå målet i termer av hur troligt det är att man lyckas

Osäkerhet

Diagnosregel

$$\forall d \text{ Lufttomt}(d) \Rightarrow \text{Punktering}(d)$$

Inte korrekt eftersom alla lufttomma däck inte punkterade

$$\forall d \text{ Lufttomt}(d) \Rightarrow \text{Punktering}(d) \vee \text{IngenVentil}(d) \vee \text{IngenSlang}(d) \vee \text{IntePumpat}(d) \\ \vee \dots \text{qualification}$$

Funkar inte med

$$\forall d \text{ Punktering}(d) \Rightarrow \text{Lufttomt}(d) \text{ eftersom det kan vara pyspunka, nypunkat etc}$$

Om inget oförutsett inträffat så:

Icke-monoton logik

$$\forall d \text{ Lufttomt}(d) \wedge \mathcal{M} \text{ Punktering}(d) \Rightarrow \text{Punktering}(d)$$

Sannolikhet

- Vill ha något i stil med:

$$\forall d \text{ Lufttomt}(d) \xRightarrow{0,8} \text{Punktering}(d)$$

- Sannolikheten för punktering givet att däck är lufttomt är 0,8
- Detta betyder att 80% av alla lufttomma däck har punktering inte att vi har 80% punktering, dvs satser är sanna eller falska med viss sannolikhet.
 - Grad av sanning hanteras med Fuzzy logic

Varifrån kommer sannolikheterna

- Frekventistiskt perspektiv
 - Sannolikheter är relativa frekvenser som baseras på experiment
- Subjektivistiskt perspektiv
 - Sannolikheter beskriver en agents konfidens
- Objektivistiskt perspektiv
 - Sannolikheterna är reela aspekter i verkligheten; objektiva sanningar, beroende på objektet, ex. sannolikheten för klave = 0,5

Beslutsteoretisk agent

- Räkna ut sannolikheter för nuvarande tillstånd baserat på percept och handling
- Räkna ut utfallssannolikheter för handlingar baserat på handlingsbeskrivningar och nuvarande tillstånd
- Välj handling med högst förväntad nytta givet sannolikheten att lyckas och information om handlingars nytta

En beslutsteoretisk agent kan inte med säkerhet välja en handling, utföra den och vara säker på utfallet

Stokastiska variabler

- $P(a)$ betecknar sannolikheten att den stokastiska variabeln a är sann, ovillkorligt (prior probability)
- Stokastiska variabler skrivs med inledande versal, ex *Punktering*
 - I boken betecknas okända stokastiska variabler med liten bokstav, $P(a)$, vilket vi gör här också
- Stokastisk variabel, X , har sannolikhet för olika värden ur en värdedomänen $\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$
- Vanlig domän är $\langle \text{sant}, \text{falskt} \rangle$
 - $P(\text{Punktering} = \text{sant}) = 0,2$
- Logiska konnektiv
 - $P(\text{Punktering} = \text{sant} \wedge \text{Cykelpump} = \text{falskt}) = 0,99$

Konventioner

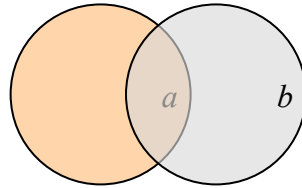
- $P(sant) = 1; P(falskt) = 0$
- $P(X=sant)$ skrivs $P(x)$ och $P(X=falskt)$ skrivs $P(\neg x)$,
 - $P(Punktering=sant)$ skrivs som $P(punktering)$
 - $P(cykelpump \wedge \neg punktering) = 0,1$

Sannolikhetsfördelning (probability distribution)

- Stokastisk variabels värdeområde kan ha fler olika värden
 - $P(\text{Däcket}=\text{punkterat}) = 0,2$
 - $P(\text{Däcket}=\text{opumpat}) = 0,3$
 - $P(\text{Däcket}=\text{helt}) = 0,5$
- **P** betecknar en vektor av sannolikheter
 - $\mathbf{P}(\text{Däcket}) = \langle 0,2, 0,3, 0,5 \rangle$
 - För domänen $\langle \text{sant}, \text{falskt} \rangle$ betecknar $\mathbf{P}(\text{Cykelpump})$ alla värden, dvs $P(\text{Cykelpump}=\text{sant})$ och $P(\text{Cykelpump}=\text{falskt})$
 - $\mathbf{P}(\text{Cykelpump}, \text{Punktering})$ betecknar alla kombinationer av värden
 - T.ex. $\mathbf{P}(\text{cykelpump}, \text{Punktering})$ betecknar de fall då $\text{Cykelpump}=\text{sant}$ medan Punktering är antingen sant eller falskt

Grundläggande axiom (Kolmogorows axiom)

- $0 \leq P(a) \leq 1$
- För variabeln D med domänen $d_1, \dots, d_n$ gäller: $\sum_{i=1}^n P(D = d_i) = 1$
- $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$



Betingad sannolikhet (Conditional probability)

Sannolikheten att a är sann givet att b är sann tecknas $P(a|b)$ (posterior probability)

$P(\text{punktering} \mid \neg \text{luft}) = 0,8$, förutsatt att vi bara vet lufttomt

$P(\text{punktering} \mid \text{luft} \wedge \text{cykelpump}) = 0,01$, om vi vet mer

Betingad sannolikhet kan definieras i termer av ovillkorlig sannolikhet

$$P(a \mid b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

Produktregeln $P(a \wedge b) = P(a \mid b)P(b)$

$$P(a \wedge b) = P(b \mid a)P(a)$$

Kedjeregeln

Produktregeln för **P**

$$\mathbf{P}(A, B) = \mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B)$$

$$P(A = a_1 \wedge B = b_1) = P(A = a_1 | B = b_1) \cdot P(B = b_1)$$

$$P(A = a_1 \wedge B = b_2) = P(A = a_1 | B = b_2) \cdot P(B = b_2)$$

$\vdots$

Kan också skrivas

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_n | a_{n-1}, \dots, a_1) P(a_{n-1}, \dots, a_1) \quad \text{fortsätt applicera}$$

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_n | a_{n-1}, \dots, a_1) P(a_{n-1} | a_{n-2}, \dots, a_1) \dots P(a_2 | a_1) P(a_1)$$

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n P(a_i | a_{i-1}, \dots, a_1) \quad \text{Kedjeregeln}$$

Simultanfördelning, 1 (joint probability distribution)

- Simultanfördelningen visar sannolikheten för varje möjlig kombination av värden på stokastiska variabler
- $\mathbf{P}(Punktering)$ betecknar såväl $P(punktering)$ som $P(\neg punktering)$,
ex $\mathbf{P}(Punktering) = \langle 0,6, 0,4 \rangle$

	$\mathbf{P}(Punktering)$
$Punktering=sant$	0,6
$Punktering=falskt$	0,4

- För två variabler med tvåvärd värdedomän (t.ex. sant, falskt) blir det $2 \times 2 = 4$ värden, ex $\mathbf{P}(Punktering, Luft)$ betecknar alla kombinationer av de stokastiska variablerna $Punktering$ och $Luft$

Simultanfördelning, 2

	$P(\text{Punktering}, \text{Luft})$	
	luft	$\neg \text{luft}$
punktering	0,1	0,4
$\neg \text{punktering}$	0,4	0,1

- Tabellens värden måste summeras till 1
- Ur tabellen fås t.ex.:

$$P(\text{punktering} \wedge \neg \text{luft}) = 0,4$$

$$P(\text{Punktering} \wedge \text{luft}) = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

$$P(\text{punktering} \mid \neg \text{luft}) = \frac{P(\text{punktering} \wedge \neg \text{luft})}{P(\neg \text{luft})} = \frac{0,4}{0,4 + 0,1} = 0,8$$

Oberoende

- Fler variabler
 $P(\text{Punktering}, \text{Luft}, \text{Cykelpump})$ ger tabell med $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ värden
- För n binära stokastiska variabler har vi 2^n värden
- Men $P(\text{Tärning}=6 \mid \text{Tärning}=1) = P(\text{Tärning}=6)$, dvs sannolikheten för att få 6 är oberoende av tidigare tärningskast
- $P(\text{Punktering}, \text{Sol})$ är också oberoende och kan skrivas som $P(\text{Punktering})P(\text{Sol})$ med $2+2$ värden
- $P(\text{Punktering}, \text{Sol}, \text{Tandvärk}, \text{FredPåJorden})$ är oberoende, dvs $P(\text{Punktering})P(\text{Sol})P(\text{Tandvärk})P(\text{FredPåJorden})$
- Ger tabell med $2+2+2+2=8$ värden istället för $2^4=16$ värden

Bayes teorem

$$P(a \wedge b) = P(a | b)P(b)$$

$$P(a \wedge b) = P(b | a)P(a)$$

Produktregeln

$$P(a | b)P(b) = P(b | a)P(a)$$

$$P(a | b) = \frac{P(b | a)P(a)}{P(b)}$$

Bayes teorem

$$\mathbf{P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}}$$

Bayes teorem för flervärda variabler

Bayes teorem, 2

- Fördelen med Bayes teorem är att den låter oss uttrycka diagnossamband i termer av kausalsamband
- Kausalsamband, $P(a|b)$, "b orsakar a", men vi vill ofta diagnostisera utifrån observationer
- Exempel

$P(\text{rödaPrickar} \mid \text{mässling}) = 0,8$ (kausalsamband)

$P(\text{mässling}) = 0,3$ (ovillkorligt)

$P(\text{rödaPrickar}) = 0,5$

Diagnostisera mässling utifrån patient med röda prickar:

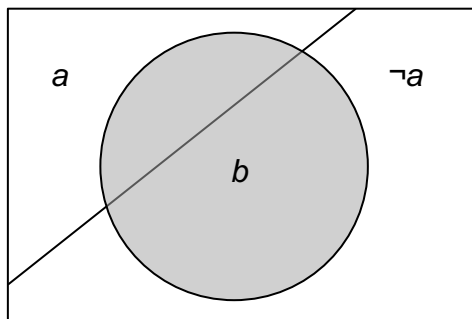
$$P(\text{mässling} \mid \text{rödaPrickar}) = \frac{P(\text{rödaPrickar} \mid \text{mässling})P(\text{mässling})}{P(\text{rödaPrickar})} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,5}$$

Mer Bayes

$$P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$$

- Eftersom vi har disjunkta händelser som fyller hela utfallsrummet kan $P(b)$ tecknas som:

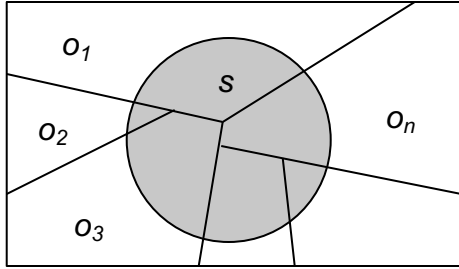
$$P(b) = P(a)P(b|a) + P(\neg a)P(b|\neg a)$$



$$P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(a)P(b|a) + P(\neg a)P(b|\neg a)}$$

Mer generell Bayes

- Om vi har flera möjliga orsaker till en viss observation



$$P(s) = \sum_{i=1}^n P(o_i)P(s|o_i)$$

$$P(o_k | s) = \frac{P(s|o_k)P(o_k)}{\sum_{i=1}^n P(o_i)P(s|o_i)}$$

Exempel, Kahneman & Tversky, 1972

- Stad med två taxibolag: Blå har 85%, Gröna har 15%
- Taxi inblandad i smitningsolycka
- Vittne säger att den var grön
 - Test visar att vittnet blandar ihop grönt och blått 20% av fallen
- Hur tillförlitligt är vittnet?

$$P(\text{grön} \mid \text{vittnarGrön})$$

$$P(\text{vittnarGrön} \mid \text{grön}) = 0,8$$

$$P(\text{vittnarGrön} \mid \text{blå}) = 0,2$$

$$P(\text{grön} \mid \text{vittnarGrön}) = \frac{P(\text{vittnarGrön} \mid \text{grön})P(\text{grön})}{P(\text{vittnarGrön})}$$

$$P(\text{vittnarGrön}) = P(\text{grön})P(\text{vittnarGrön} \mid \text{grön}) + P(\text{blå})P(\text{vittnarGrön} \mid \text{Blå})$$

$$P(\text{grön} \mid \text{vittnarGrön}) = \frac{0,15 \cdot 0,8}{0,15 \cdot 0,8 + 0,85 \cdot 0,2} = 0,41$$

Normalisering, 1

$$P(\text{grön} \mid \text{vittnarGrön}) = \frac{P(\text{vittnarGrön} \mid \text{grön})P(\text{grön})}{P(\text{vittnarGrön})}$$

$$P(\text{blå} \mid \text{vittnarGrön}) = \frac{P(\text{vittnarGrön} \mid \text{blå})P(\text{blå})}{P(\text{vittnarGrön})}$$

- I båda fallen har vi $P(\text{vittnarGrön})$ i nämnaren och egentligen är vi mest intresserade av vilken av dessa som är mest sannolik
- Vi normaliserar och inför: $\alpha = \frac{1}{P(\text{vittnarGrön})}$

Normalisering, 2

Exempel. Är en individ med röda prickar marsian eller inte?

$$P(\text{marsian}) = 0,2$$

$$P(\neg \text{marsian}) = 1 - P(\text{marsian}) = 0,8$$

$$P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian}) = 0,96$$

$$P(\text{röda Prickar} \mid \neg \text{marsian}) = 0,26$$

OBS! $P(\text{röda Prickar} \mid \neg \text{marsian}) \neq 1 - P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian})$

Till skillnad från $P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian}) = 1 - P(\neg \text{röda Prickar} \mid \text{marsian})$

$$P(\text{marsian} \mid \text{röda Prickar}) = \frac{P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian}) \cdot P(\text{marsian})}{P(\text{röda Prickar})}$$

$$P(\neg \text{marsian} \mid \text{röda Prickar}) = \frac{P(\text{röda Prickar} \mid \neg \text{marsian}) \cdot P(\neg \text{marsian})}{P(\text{röda Prickar})}$$

$$\text{Normalisera och inför } \alpha = \frac{1}{P(\text{röda Prickar})}$$

$$P(\text{marsian} \mid \text{röda Prickar}) = \alpha \cdot P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian}) \cdot P(\text{marsian}) = 0,96 \cdot 0,2 \cdot \alpha = 0,19 \cdot \alpha$$

$$P(\neg \text{marsian} \mid \text{röda Prickar}) = \alpha \cdot P(\text{röda Prickar} \mid \neg \text{marsian}) \cdot P(\neg \text{marsian}) = 0,26 \cdot 0,8 \cdot \alpha = 0,21 \cdot \alpha$$

Normaliserad Bayes

- $\mathbf{P}(Y|X)=\alpha\mathbf{P}(X|Y)\mathbf{P}(Y)$
där α är en normaliseringskonstant som ser till att $\mathbf{P}(Y|X)$ summeras till 1
- $\mathbf{P}(X|Y)$ kausalsamband, ex mässling ger röda prickar
- Vi har också

$$P(a | b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} = \alpha \cdot P(a \wedge b)$$

Jämför med Bayes

$$P(a | b) = \frac{P(b | a)P(a)}{P(b)} = \alpha \cdot P(b | a) \cdot P(a)$$

Exempel, taligenkänning

Man vill välja det mest sannolika ord som en viss ljudsignal svarar mot

$$\mathbf{P}(\text{Ord} \mid \text{Signal}) = \frac{\mathbf{P}(\text{Signal} \mid \text{Ord})\mathbf{P}(\text{Ord})}{\mathbf{P}(\text{Signal})} = \alpha \cdot \mathbf{P}(\text{Signal} \mid \text{Ord}) \cdot \mathbf{P}(\text{Ord})$$

$\mathbf{P}(\text{Ord})$ anger hur vanligt ett visst ord är (i en viss kontext)

$\mathbf{P}(\text{Signal} \mid \text{Ord})$ är den akustiska modellen och anger vilken ljudsignal ett ord oftast ger upphov till

$$\text{Ex: } P(\text{"räv"} \mid \text{räv}) = 0,7$$

$$P(\text{"oäv"} \mid \text{räv}) = 0,1$$

$$P(\text{"rev"} \mid \text{räv}) = 0,2$$

Villkorligt oberoende, 1

$$P(\text{mässling} \mid \text{rödaPrickar} \wedge \text{feber}) = \alpha \cdot P(\text{rödaPrickar} \wedge \text{feber} \mid \text{mässling}) \cdot P(\text{mässling})$$

- Skalar inte upp eftersom vi har kombinationer av värden, generellt $\mathbf{P}(X_1, X_2, \dots, X_n \mid Y)$ ger 2^n värden
- Men både röda prickar och feber beror på mässling så vi kan anta att röda prickar (feber) inte påverkas av om man har feber (röda prickar) eller inte, givet att vi vet mässling. De är villkorligt oberoende

$$P(\text{mässling} \mid \text{rödaPrickar} \wedge \text{feber}) = \alpha \cdot P(\text{rödaPrickar} \mid \text{mässling}) \cdot P(\text{feber} \mid \text{mässling}) \cdot P(\text{mässling})$$

Villkorligt oberoende, 2

- Generellt:
- Om variablerna X och Y är villkorligt oberoende givet variabeln Z så gäller att:

$$\mathbf{P}(X, Y \mid Z) = \mathbf{P}(X \mid Z) \mathbf{P}(Y \mid Z)$$

- Vi har också varianterna:

$$\mathbf{P}(X \mid Y, Z) = \mathbf{P}(X \mid Z) \text{ och } \mathbf{P}(Y \mid X, Z) = \mathbf{P}(Y \mid Z)$$

om X och Y villkorligt oberoende givet Z

$$\mathbf{P}(\textit{Feber} \mid \textit{Mässling} \wedge \textit{RödaPrickar}) = \mathbf{P}(\textit{Feber} \mid \textit{Mässling})$$

dvs sannolikheten för feber givet att man har mässling påverkas inte av om man har röda prickar eller ej

Naive Bayes

- Om en orsak kan ge upphov till flera olika effekter så kan man förenkla simultanfördelningen

$$\mathbf{P}(Mässling, RödaPrickar, Feber) = \text{produktregeln} = \mathbf{P}(Mässling)\mathbf{P}(RödaPrickar, Feber | Mässling)$$

Villkorligt oberoende ger:

$$\mathbf{P}(Mässling, RödaPrickar, Feber) = \mathbf{P}(Mässling)\mathbf{P}(Feber | Mässling)\mathbf{P}(RödaPrickar | Mässling)$$

Mer generellt

$$\mathbf{P}(Orsak, Effekt_1, Effekt_2, \dots, Effekt_n) = \mathbf{P}(Orsak) \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(Effekt_i | Orsak)$$

- Kallas Naive Bayes eftersom den också ibland används när effekterna inte är villkorligt oberoende