729G78 Artificiell intelligens
Kunskapsrepresentation - Predikatlogik

Arne Jönsson
HCS/IDA

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Sundhet och fullständighet

Metaspråk

- Satslogiken kallas objektspråk med operatorer som t.ex. $\Longrightarrow$ $\Longleftrightarrow$
  - Alternativa symboler $\longrightarrow$ $\longleftrightarrow$ eller $\supset$ för $\Longrightarrow$
- Metaspråk beskriver egenskaper om objektspråket
  - $\equiv$ Två objektspråksformler är lika, ex. $\neg A \vee B \equiv A \Longrightarrow B$
  - $\models$ En formel är en logisk konsekvens av en annan, ex. $A \wedge B \models A$
    $\models$ beror av satsernas sanningsvärden
  - $\vdash$ En formel kan härledas ur andra
    $\vdash$ beror bara av satsernas form

Sundhet och fullständighet

- Vi vill att vårt logiska system skall kunna bevisa allt som är sant och inget annat
- Ett logiskt system KB är *sunt* om
  KB $\vdash \alpha \Longrightarrow$ KB $\vDash \alpha$ dvs alla formler är logiskt sanna, inga ogiltiga formler kan härledas
- Ett logiskt system är *fullständigt* om
  KB $\vDash \alpha \Longrightarrow$ KB $\vdash \alpha$ dvs alla logiska sanningar är formler, alla giltiga formler kan härledas
- Satslogiken är sund och fullständig

Sundhet, exempel 1

Gå igenom varje regel. T.ex. är Modus ponens sund?

Ex $K, K \Longrightarrow L \vdash L$ och $K, K \Longrightarrow L \vDash L$?

Kan vi hitta logiska konsekvenser som inte är sanna?

K	L	$K \Longrightarrow L$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S

L sann på varje rad där K och $K \Longrightarrow L$ är sanna

(K: ”AI är kul” och L: ”Folk är lyckliga”, dvs OM K och $K \Longrightarrow L$ så L, dvs folk är lyckliga)

Sundhet, exempel 2

Hur är det med L, $K \Longrightarrow L \vdash K$ och L, $K \Longrightarrow L \models K$?

K	L	$K \Longrightarrow L$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S

Inte sund. Det finns rader då L, $K \Longrightarrow L$ är sann med K falsk

L, $K \Longrightarrow L \not\models K$ (Folk kan vara lyckliga utan att AI är kul)

Detta är *inte* en regel i satslogiken

Fullständighet

- Alla logiska konsekvenser är härledda formler
- Besvärligare att visa, hur vet vi att allt kan härledas
- Räcker t.ex. inte med Modus ponens
  $K, K \lor M \Longrightarrow L \vDash L$, dvs om K sann så är L en logisk konsekvens
  men inte $K, K \lor M \Longrightarrow L \vdash L$ eftersom modus ponens inte räcker för att härleda L, lägg till $\lor$I så går det
- Fler inferensregler kan ge ett fullständigt system, eller andra. Resolution är t.ex. fullständig

Predikatlogik

Predikatlogik

Problem med satslogik

- Världen är mer än ett antal atomiska fakta
  - Arne gillar AI, Per gillar AI, Pål gillar AI ..
- Istället objekt och relationer mellan objekt
  - GillarAI(Arne) eller Gillar(AI, Arne)
  - Gillar(x, y) där x kan AI och y kan vara Arne, Per, Pål etc

Syntaktiska element

- Termer, refererar till objekt
  - Konstanter (A, B, S0, Per…)
  - Variabler (x, y, z …)
  - Funktioner av termer (f(x), g(x, S0, z), addera(1, 2, 3)…)
- Formler
  - Atomära formler
    - Atomära satser, Q
    - Predikat applicerade på termer, P(x, y), R(Per, z) , Gillar(Per, Pål) ….
  - Formler med konnektiv ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$) samt identitet (=)
  - Kvantifierade formler ($\forall$, alla; $\exists$, minst en)

Syntaxexempel, 1

- Per gillar AI
  GillarAI(Per) där Per är en konstant
- Per och Pål är bröder
  Bröder(Per, Pål) alt. Bror(Per, Pål), BrorTill(Per, Pål)
- Glad(x), Glad(x, t), Glad(x, l, t) där x, l och t är variabler
  Glad(Pål), Glad(Pål, 1999-12-31), Glad(Pål, 1999-12-31, Malmö)
  Inte trivialt att välja rätt predikat
- störreÄn(1,2) returnerar ett sanningsvärde
- $\forall x$ Glad(x) Alla är glada
  $\exists x$ Glad(x) Någon är glad
- $\forall x, y$ Bror(x, y) $\Leftrightarrow$ Bror(y, x)

Bundna och fria variabler

- $P(x)$, x kallas fri variabel
- $\forall x\ P(x)$
  variabeln x *bunden* av $\forall$
- $\exists x\ P(x)$
  variabeln x *bunden* av $\exists$
- Kvantifierare har räckvidd
  $\forall x\ P(x) \land Q(x)$ tolkas av vissa författare som att andra x fritt, använd då parenteser $\forall x\ (Glad(x) \lor Ledsen(x))$ vi kommer inte att göra den tolkningen
  $\forall x,y\ P(x, y) \Longrightarrow \exists z\ S(z) \land Q(x, y, z)$

Syntaxexmpel, 2

- $\forall \implies$ och $\exists \land$
- $\forall x\ P(x) \implies Q(x)$
  Den som gillar AI är glad
  $\forall x\ GillarAI(x) \implies Glad(x)$
- $\forall x\ GillarAI(x) \land Glad(x)$
  Alla gillar AI och alla är glada
- $\exists x\ P(x) \land Q(x)$
  Någon gillar AI och är glad
  $\exists x\ GillarAI(x) \land Glad(x)$
- $\exists x\ GillarAI(x) \implies Glad(x) \equiv \exists x \neg GillarAI(x) \lor Glad(x)$
  Någon gillar inte AI eller är glad

Syntaxexmpel, 3

- $\exists x, y\ Bror(x, Pia) \land Bror(y, Pia) \land \neg(x=y)$
  Pia har två bröder
- Likhet $Far(Per) = Gert$
- $\exists x \forall y\ Gillar(x, y)$
- $\forall x \exists y\ Gillar(x,y)$
- $\forall x\ P(x) \Longrightarrow \exists y\ Q(y) \land H(x, y)$
  Älgar har horn
  $\forall x\ Älg(x) \Longrightarrow HarHorn(x)$
  $\forall x\ Älg(x) \Longrightarrow \exists y\ Horn(y) \land Har(x, y)$

Syntaxexempel, 4

- Alla kogvetare är snälla

  $\forall x\ Kogvetare(x) \Longrightarrow Snäll(x)$
- Några kogvetare är inte snälla

  $\exists x\ Kogvetare(x) \land \neg Snäll(x)$
- En kogvetare är en kogvetare

  $\forall x\ Kogvetare(x) \Longrightarrow Kogvetare(x)$
- Alla som känner Pål är kända av Per

  $\forall x\ Känner(x, Pål) \Longrightarrow Känner(Per, x)$
- Alla människor tycker om någon (människa)

  $\forall x\ Människa(x) \Longrightarrow \exists y\ Människa(y) \land TyckerOm(x,y)$
- Någon människa tycker om alla (människor)

  $\exists x\ Människa(x) \land \forall y\ Människa(y) \Longrightarrow TyckerOm(x, y)$

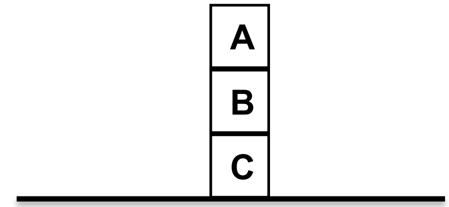
Semantik för predikatlogik

Semantik

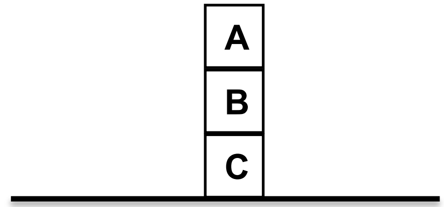
- Semantiken för satslogik oproblematisk
  Antag att Arne gillar AI då är satsen G: ArneGillarAI sann
  I(G) = sant
- Predikatlogik har objekt i världen
  GillarAI(Arne)
  I(GillarAI(Arne)) = sant
- Variabler refererar till olika objekt i en domän
  GillarAI(x)
  I(GillarAI(x)) sant för de individer, x, där GillarAI är sant

Domän

- Mängden objekt i en specifik värld
- Exempel, Blocks world
  Objekt i världen: **A, B, C, Golv**
- Relationer i världen: **On, Clear**
  givna genom **On** = {<**A, B**>, <**B, C**>, <**C, Golv**>}, **Clear**={<**A**>}
- För att beskriva Blocks world i predikatlogik behövs: (använder mnemomiska symboler, men kunde varit t.ex. G0046, R45, etc)
  – Predikatlogiska objektkonstanter, A, B, C, Golv
  – Binär relationskonstant On
  – Unär relationskonstant Clear



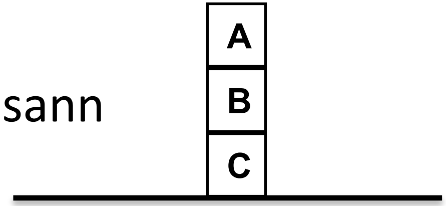
Modeller och Tolkning



- Relationer i Blocks world
  On = {<**A, B**>, <**B, C**>, <**C, Golv**>}, **Clear**={<**A**>}
- Modeller i Blocks world, olika tolkningar
  I(On(A,B)) = sant
  I(On(B,A)) = falskt
  I(Clear(A)) = sant
  I(Clear(B)) = falskt
  I(On(A,B) ∧ ¬On(A,Golv)) = sant
  etc

Semantik för kvantifierare

- $\forall x\ P(x)$ är sann om $P(x)$ är sann för alla tilldelningar av variabeln x till objekt i domänen
- Oftast är domänen alla objekt i hela världen, men kan också vara begränsad
  T.ex. i Blocks world med A, B, C eller Golv
  $\forall x,y\ On(y, x) \Longrightarrow \neg Clear(x)$, x kan tilldelas A, B, C eller Golv.
  $y = A$, $x = B$ ger $On(A, B) \Longrightarrow \neg Clear(B)$ men också
  $y = Golv$, $x = B$ ger $On(Golv, B) \Longrightarrow \neg Clear(B)$
- $\exists x\ P(x)$ är sann om det finns något objekt som gör $P(x)$ sann
  Ex $\exists x\ Clear(x)$ är sant om $x=A$



Samband mellan kvanitifierare

- $\forall x$ GillarAI(x) innebär $\neg\exists x\ \neg$GillarAI(x)
- $\exists x\ \neg$GillarAI(x) innebär $\neg\forall x$ GillarAI(x)
- Mer generellt (jämför DeMorgan)
  $\forall x\ P(x) \equiv \neg\exists x\ \neg P(x)$
  $\exists x\ \neg P(x) \equiv \neg\forall x\ P(x)$
  $\forall x\ \neg P(x) \equiv \neg\exists x\ P(x)$
  $\exists x\ P(x) \equiv \neg\forall x\ \neg P(x)$

Sundhet och fullständighet

- Predikatlogiken är sund, dvs $\text{KB} \vdash \alpha \Longrightarrow \text{KB} \vDash \alpha$ dvs alla formler är logiskt sanna
- Predikatlogiken är inte fullständig
- Däremot kan man visa att något *inte* är satisfierbart