729G78 Artificiell intelligens
Kunskapsrepresentation – Satslogik 2

Arne Jönsson
HCS/IDA

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Semantik för satslogik

Modell

- Formlerna är bara symboler, syntax
- Semantiken ger mening
- En modell w är en tilldelning av sanningsvärden till symbolerna
- Exempel, symbolerna A och B ger 4 möjliga modeller

	A	B
w1	Falsk	Falsk
w2	Falsk	Sann
w3	Sann	Falsk
w4	Sann	Sann

Egenskaper hos en formel

- Tautologi
  - Sann för alla möjliga tilldelningar, $\top$
  - $A \lor \neg A$
- Kontradiktion
  - Falsk för alla möjliga tilldelningar, $\bot$
  - $A \land \neg A$
- Kontingent
  - Varken tautologi eller kontradiktion. Sann för vissa tilldelningar falsk för andra
  - $A \land B$

Exempel

- $A \Longrightarrow B \vee B \Longrightarrow C$ är en tautologi
- Sanningstabell eller
- Motsägelsebevis

  Antag kontradiktion, dvs $A \Longrightarrow B \vee B \Longrightarrow C$ är falsk
  $A \Longrightarrow B$ är bara falsk om A är sann och B är falsk
  $B \Longrightarrow C$ är bara falsk om B är sann och C är falsk
  disjunktionen är bara falsk om båda falska, dvs B både sann och falsk, vilket inte är möjligt, alltså T

Tolkningsfunktion

- Antag att α är en formel och w en modell
- Tolkningsfunktionen I(α, w) avgör om det finns en modell som gör formeln satisfierbar (SAT)
  - Sant om w satisfierar α
  - Falskt om w **inte** satisfierar α
- Ex. antag att $\alpha = A \wedge \neg B$
  - I(α, w1) = Falskt
  - I(α, w3) = Sant
  - etc

	A	B
w1	Falsk	Falsk
w2	Falsk	Sann
w3	Sann	Falsk
w4	Sann	Sann

Logisk konsekvens

- Slutsatserna en logisk konsekvens av premisserna (entailment)
- Skrivs $\alpha \vDash \beta$ dvs β är en logisk konsekvens av α, varje modell av α är också en modell av β
  Exempel
  $A \land \neg B \vDash A$
  A sann i varje tolkning där $A \land \neg B$ sann
- Tautologi om man inte har vänsterled, t.ex.
  $\vDash A \lor \neg A$
- Kan använda sanningstabeller för att testa logisk konsekvens, men NP-komplett, 2^n där n antal satser

Logisk konsekvens med sanningstabell, exempel

$\{P \Longrightarrow R, R \Longrightarrow Q\} \vDash P \Longrightarrow Q$

$P \Longrightarrow Q$ sann när $P \Longrightarrow R$ sann OCH $R \Longrightarrow Q$ sann

P	R	Q	$P \Longrightarrow R$	$R \Longrightarrow Q$	$P \Longrightarrow Q$
F	F	F	S	S	S
F	F	S	S	S	S
F	S	F	S	F	S
F	S	S	S	S	S
S	F	F	F	S	F
S	F	S	F	S	S
S	S	F	S	F	F
S	S	S	S	S	S

Varje rad där $P \Longrightarrow R$ sann

och

$R \Longrightarrow Q$ sann

är också

$P \Longrightarrow Q$ sann

Inferens för satslogik

Inferens

- Syntaktiska härledningar
  - Opererar direkt på syntaxen, ingen semantik, $\vdash$
- Olika typer:
  - Naturlig deduktion
  - Framåtinferens
    - Söker från reglerna framåt
  - Bakåtinferens
    - Söker från reglerna bakifrån
  - Resolution

Naturlig deduktion

- Förutsätter sundhet och fullständighet
- Inför premisser
- Använd härledningsregler (deduktionsregler) för att komma fram till slutsatsen
- Säkerställ att slutsatsen bara beror av premisserna
- Kan göra antaganden, t.ex. reductio ad absurdum

Reductio ad absurdum

Används för motsägelsebevis

- Om mängden teorem $\mathcal{A}$ har en modell men inte $\mathcal{A} \cup \neg\alpha$ så $\mathcal{A} \vDash \alpha$
- Ex. $\mathcal{A}$ = {¬A, B ∧ C} har en modell då A falsk och B och C båda sanna.
  Lägg till ¬B
  $\mathcal{A}$ ´= {¬A, B ∧ C, ¬B} nu finns ingen modell eftersom B inte kan vara både sann och falsk och således $\mathcal{A} \vDash$ B

Deduktionsregler

Exempel

- Modus Ponens

$$\frac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

dvs om $\alpha \Longrightarrow \beta$ och α är givna så kan man sluta sig till β
$\{\alpha, \alpha \Longrightarrow \beta\} \vdash \beta$

- **Premisser** ovan strecket och **slutsatser** under

Deduktion, Exempel

Visa att

$$\{R, R \Longrightarrow W, W \Longrightarrow S\} \vdash S$$

Modus ponens

$$\{R, R \Longrightarrow W\} \vdash W$$

Modus ponens igen

$$\{W \Longrightarrow S\ , W\} \vdash S$$

dvs ny kunskapsbas

$$\{R, R \Longrightarrow W, W \Longrightarrow S, W, S\}$$

W kom med på köpet

Bevisregler i naturlig deduktion

Introduktionssregler

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\bot} \quad \bot\mathrm{I}$$

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \land \beta} \quad \land\mathrm{I}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \lor \beta} \quad \lor\mathrm{I}$$

$$\begin{array}{l} \alpha \\ \hline \bot \\ \hline \neg\alpha \end{array} \quad \neg\mathrm{I}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \hline \alpha \Rightarrow \beta \end{array} \quad \Rightarrow\mathrm{I}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\alpha \Leftrightarrow \beta} \quad \Leftrightarrow\mathrm{I}$$

Eliminationssregler

$$\frac{\alpha \land \beta}{\alpha} \quad \land\mathrm{E}$$

$$\frac{\alpha \lor \beta \quad \alpha \Rightarrow \delta \quad \beta \Rightarrow \delta}{\delta} \quad \lor\mathrm{E}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} \quad \Rightarrow\mathrm{E}$$

$$\begin{array}{l} \neg\alpha \\ \hline \bot \\ \hline \alpha \end{array} \quad \neg\mathrm{E}$$

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta} \quad \Leftrightarrow\mathrm{E}$$

Exempel

1 Ingen rök utan eld, såvida ingen röker

2 Det finns alltid någon som feströker

3 Det är fest

4 Visa att det ryker

1 Eld ∨ Röker ⟹ Rök

2 Fest ⟹ Röker

3 Fest

4 Rök

2, 3 och ⟹E ger 3b Röker

3b och ∨I ger 3c Eld ∨ Röker

3c, 1 och ⟹E ger Rök

$$\{\text{Eld} \vee \text{Röker} \Longrightarrow \text{Rök}, \text{Fest} \Longrightarrow \text{Röker}, \text{Fest}\} \vdash \text{Rök}$$

Bevisschema

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	A_1	Premiss
⋮	⋮	⋮	⋮
{Beror av regel*}	i	A_i	Radnummer, regel
⋮	⋮	⋮	⋮
{Bara premisser}	x	B	Slutsats

*Premissmängderna räknas ut som:

- Unionen av radernas premissmängder för reglerna ⊥I, ∧I, ∧E, ∨I, ∨E, ⟹E, ⟺I, ⟺E
- Differensen för reglerna ¬I, ¬E, ⟹I (ordnade premisser)

Exempel, 1

Visa att {A, ¬(A ∧ ¬B)} ⊢ B

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	A	Premiss
{2}	2	¬(A ∧ ¬B)	Premiss
{3}	3	¬B	Antagande*
{1, 3}	4	A ∧ ¬B	1, 3 ∧I
{1, 2, 3}	5	⊥	2, 4, ⊥I
{1, 2}	6	B	3, 5, ¬E

Bara premisser

* Provisorisk premiss för ¬E

Exempel, 2

Visa att $A \implies C \vdash (C \implies B) \implies (A \implies B)$

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	$A \implies C$	Premiss
{2}	2	A	Antagande
{3}	3	B	Antagande
{1, 2}	4	C	1, 2, $\implies$E
{1, 2, 3}	5	$C \implies B$	3, 4, $\implies$I
{2, 3}	6	$A \implies B$	2, 3, $\implies$I
{1}	7	$(C \implies B) \implies (A \implies B)$	5, 6, $\implies$I

Några strategier

1. Härledning av $\neg\alpha$
   Antag α, härled $\perp$ och använd ¬I
2. Härledning av $\alpha \land \beta$
   Härled α och β var för sig och använd ∧I
3. Härledning av $\alpha \lor \beta$
   Reductio ad absurdum, antag $\neg(\alpha \lor \beta)$, använd de Morgan $\neg\alpha \land \neg\beta$, generera $\perp$ och avsluta med ¬E
4. Härledning av $\alpha \Longrightarrow \beta$
   Antag α, härled β och använd ⟹I
5. Härledning av $\alpha \Longleftrightarrow \beta$
   Härled $\alpha \Longrightarrow \beta$ och $\beta \Longrightarrow \alpha$ och använd ⟺I

Framåt- och bakåtinferens

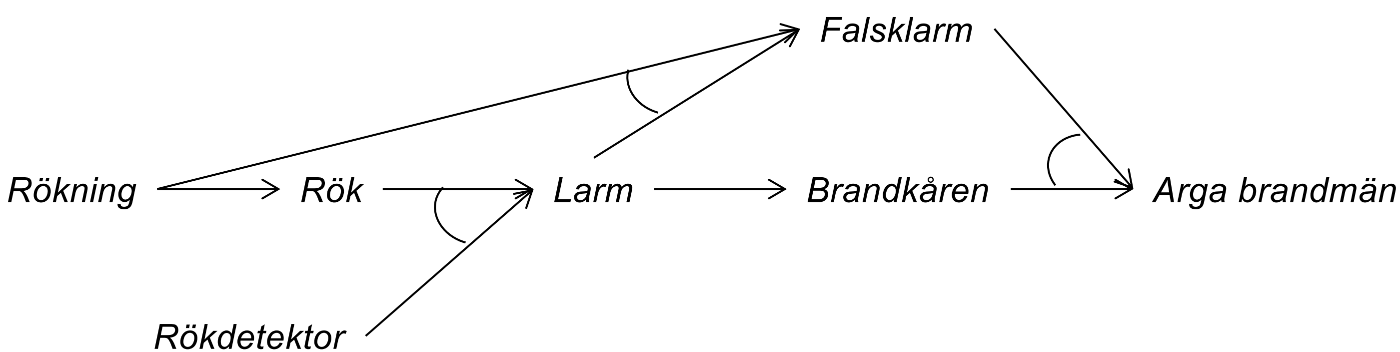
Exempel

1. Rökning ∨ Eld ⇒ Rök
2. Rök ∧ Rökdetektor ⇒ Larm
3. Larm ⇒ Brandkåren kommer
4. Rökning ∧ Larm ⇒ Falsklarm
5. Brandkåren kommer ∧ Falsklarm ⇒ Arga brandmän
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. Arga brandmän?

Framåtinferens

Börja i någon premiss

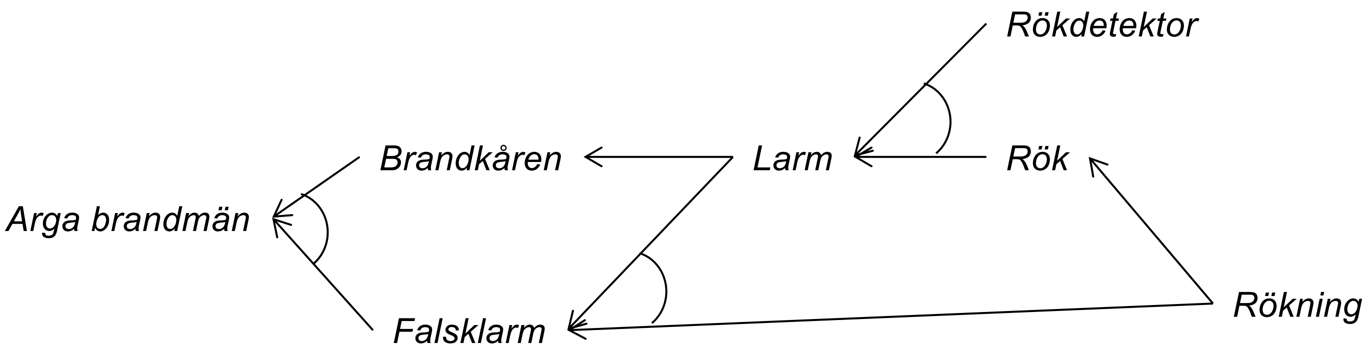
1. *Rökning ∨ Eld ⇒ Rök*
2. *Rök ∧ Rökdetektor ⇒ Larm*
3. *Larm ⇒ Brandkåren kommer*
4. *Rökning ∧ Larm ⇒ Falsklarm*
5. *Brandkåren kommer ∧ Falsklarm ⇒ Arga brandmän*
6. *Rökning*
7. *Rökdetektor*
8. *Arga brandmän?*



Bakåtinferens

Börja i slutsatsen

1. *Rökning ∨ Eld ⇒ Rök*
2. *Rök ∧ Rökdetektor ⇒ Larm*
3. *Larm ⇒ Brandkåren kommer*
4. *Rökning ∧ Larm ⇒ Falsklarm*
5. *Brandkåren kommer ∧ Falsklarm ⇒ Arga brandmän*
6. *Rökning*
7. *Rökdetektor*
8. *Arga brandmän?*



Resolution

- Mekanisk bevismetod
- Ex, satslogik
  - Rökning ⇒ Rök
  - Rök ⇒Brandvarnarlarm
  - Implikation transitiv, dvs Rökning ⇒ Brandvarnarlarm
- $\alpha \Rightarrow \beta$ kan skrivas som $\neg\alpha \vee \beta$
  - ¬ Rökning ∨ Rök
  - ¬ Rök ∨ Brandvarnarlarm
  - Dvs ¬Rökning ∨ Brandvarnarlarm
  - Kallas resolvent

Resolution

- Antag att $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ är mängder med teorem och att α är ett teorem
- Resolution

$$\frac{\mathcal{A} \cup \alpha \quad \neg\alpha \cup \mathcal{B}}{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$$

- Exempel

$$\frac{A \vee \neg B \quad B \vee C}{A \vee C}$$

Resolution

1. Konvertera alla satser till konjunktiv normalform
2. Negera vad som skall visas, konvertera till konjunktiv normalform och lägg till kunskapsbasen
3. Upprepa till kontradiktion eller ingen förbättring eller annat stoppvillkor
    a. Välj två klausuler
    b. Resolvera dessa. Resolventen är disjunktionen av alla termer med lämpliga substitutioner.
    c. Om resolventen tomma mängden så returnera kontradiktion, annars lägg resolventen till KB

Exempel

1. Rökning ∨ Eld ⇒ Rök
2. Rök ∧ Rökdetektor ⇒ Larm
3. Larm ⇒ Brandkåren kommer
4. Rökning ∧ Larm ⇒ Falsklarm
5. Brandkåren kommer ∧ Falsklarm ⇒ Arga brandmän
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. Arga brandmän?

Gör om till konjunktiv form, 1

1. ¬(Rökning ∨ Eld) ∨ Rök
2. ¬(Rök ∧ Rökdetektor) ∨ Larm
3. ¬Larm ∨ Brandkåren kommer
4. ¬(Rökning ∧ Larm) ∨ Falsklarm
5. ¬(Brandkåren kommer ∧ Falsklarm) ∨ Arga brandmän
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. ¬Arga brandmän

Gör om till konjunktiv form, 2

1. ¬(Rökning ∨ Eld) ∨ Rök ⇔ (¬Rökning ∧ ¬Eld) ∨ Rök
   1. ¬Rökning ∨ Rök
   2. ¬Eld ∨ Rök
2. ¬(Rök ∧ Rökdetektor) ∨ Larm ⇔ (¬Rök ∨ ¬Rökdetektor) ∨ Larm
   1. ¬Rök ∨ ¬Rökdetektor ∨ Larm
3. ¬Larm ∨ Brandkåren kommer
4. ¬(Rökning ∧ Larm) ∨ Falsklarm ⇔ (¬Rökning ∨ ¬Larm) ∨ Falsklarm
   1. ¬Rökning ∨ ¬Larm ∨ Falsklarm
5. ¬(Brandkåren kommer ∧ Falsklarm) ∨ Arga brandmän
   1. ¬Brandkåren kommer ∨ ¬Falsklarm ∨ Arga brandmän
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. ¬Arga brandmän

Konjunktiv form

1. ¬Rökning ∨ Rök
2. ¬Eld ∨ Rök
3. ¬Rök ∨ ¬Rökdetektor ∨ Larm
4. ¬Larm ∨ Brandkåren kommer
5. ¬Rökning ∨ ¬Larm ∨ Falsklarm
6. ¬Brandkåren kommer ∨ ¬Falsklarm ∨ Arga brandmän
7. Rökning
8. Rökdetektor
9. ¬Arga brandmän

1. *¬Rökning ∨ Rök*
2. *¬Eld ∨ Rök*
3. *¬Rök ∨ ¬Rökdetektor ∨ Larm*
4. *¬Larm ∨ Brandkåren kommer*
5. *¬Rökning ∨ ¬Larm ∨ Falsklarm*
6. *¬Brandkåren kommer ∨ ¬Falsklarm ∨ Arga brandmän*
7. *Rökning*
8. *Rökdetektor*
9. *¬Arga brandmän*

Härled en motsägelse

Plocka två satser, och lägg till KB, t.ex.

1+2	ger	10. ¬Rökning V ¬Eld V Rök
3+8	ger	11. ¬Rök V Larm
10+11	ger	12. ¬Rökning V ¬Eld V Larm
6+9	ger	13. ¬Brandkåren kommer V ¬Falsklarm
4+13	ger	14. ¬Larm V ¬Falsklarm
14+5	ger	15. ¬Rökning V ¬Larm
15+7	ger	16. ¬Larm
3+16	ger	17. ¬Rök V ¬Rökdetektor
1+17	ger	18. ¬Rökning V ¬Rökdetektor
18 + 7	ger	19. ¬Rökdetektor
19 + 8	ger	en motsägelse