Probabilistisk logik

Marco Kuhlmann

1 Osäkerhet

1.01 Intelligenta agenter måste kunna hantera **osäkerhet**. Världen är endast delvist observerbar och stokastisk. (Jmf. Russell och Norvig, 2014, avsnitt 2.3.2.)

1.02 Expertsystemet Watson används idag som beslutsstödsystem inom cancersjukvården. Det bygger på ett stort antal olika informationskällor såsom uppslagsverk, nyhetsartiklar och databaser. Hur kombinerar Watson dessa källor när den ska rekommendera en behandling?

1.03 Rovern Curiosity landade på mars den 6 augusti 2012. Den är utrustad med fyra svartvita navigeringskameror och sex hjul som drivs och styrs oberoende av varandra. Hur vet Curiosity var den är och vad den måste göra för att förflytta sig dit den ska?

1.04 **Probabilistisk logik** ger oss ett ramverk för att fatta beslut utifrån osäker information. Den bygger på sannolikhetslära. Sannolikheter presenteras ofta som relativa frekvenser (så kallat frekventistiskt perspektiv). Inom probabilistisk logik ses sannolikheter istället som mått på hur säkra vi är på saker och ting (subjektiv sannolikhet).

1.05 Anna kastar tärning och ser att det är en sexa. Hon berättar för Bertil att tärningen visar ett jämnt tal. Hur stor är den subjektiva sannolikheten för ”tärningen visar en sexa” för Anna och för Bertil? Hur stor är den för Cecilia, som inte vet någonting om Annas tärningskast?

Anna: Bertil: Cecilia:

1.06 Probabilistisk logik är ett logiskt system avsett för att beskriva probabilistiska modeller och för att fatta beslut utifrån dessa modeller. Denna process kallas **probabilistisk inferens**.

1.07 Som alla modeller är probabilistiska modeller nödvändigtvis ofullständiga. De kan aldrig inkludera alla relevanta variabler, och de kan inte heller avbilda alla samband mellan variablerna. Citat George Box (1919–2013): ”All models are wrong but some are useful”.

1.08 Observera: Att säga att A är sant med en viss sannolikhet är inte samma sak som att säga att A är sant till en viss grad. Skillnaden mellan dessa två perspektiv är skillnaden mellan probabilistisk logik och **suddig logik** (eng. *fuzzy logic*).

W	P
sol	0,4
moln	0,3
regn	0,2
snö	0,1

Figur 1: En sannolikhetsfördelning $P(W)$ för variabeln W ”vädret i morgon”

2 Probabilistiska modeller

2.01 En **probabilistisk modell** består av stokastiska variabler och en sannolikhetsfördelning för dessa variabler. (Jämför med constraint satisfaction.)

2.02 En **stokastisk variabel** är en variabel med ett osäkert värde. Exempel: patientens diagnos, marsroverns position, vädret i morgon. Stokastiska variabler betecknar vi med stora bokstäver.

2.03 En **fördelning** för en (diskret) stokastisk variabel X visar sannolikheten för varje möjligt värde på X. När X har ändligt många möjliga värden kan en fördelning för den (i princip) anges i tabellform; se exemplet i figur 1. En sannolikhetsfördelning för X betecknar vi med $P(X)$.

2.04 De atomära formlerna inom probabilistisk logik säger att ”variabeln X tar värdet x”. Sannolikheten för detta påstående enligt en given fördelning $P(X)$ tecknar vi $P(X = x)$. Om det inte finns risk för flertydigheter kan vi också använda den kortare notationen $P(x)$.

$$P(W = \text{sol}) = \square\square \qquad P(\text{moln}) = \square\square$$

2.05 Variabeln W i figur 1, liksom alla andra variabler vi kommer ha att göra med, har endast ett ändligt antal möjliga värden. Det finns även variabler med oändliga värdemängder, både diskreta (tänk höjdhopp) och kontinuerliga (tänk längdhopp).

2.06 När vi bygger en probabilistisk modell har vi stor frihet i att välja sannolikheter för de variabler som ingår i modellen. Varje sannolikhetsfördelning måste dock uppfylla två grundläggande villkor, de s.k. **sannolikhetsaxiomen**:

$$\forall x \colon P(X = x) \geq 0 \qquad \sum_x P(X = x) = 1$$

X	Y	P
sol	varmt	0,4
sol	kallt	0,2
regn	varmt	0,1
regn	kallt	0,3

Figur 2: En simultanfördelning $P(X, Y)$ för två stokastiska variabler X och Y

Det första axiomet säger att vår säkerhet på att variabeln X tar värdet x inte kan vara negativ. Det andra axiomet säger att sannolikheterna för alla möjliga värden på X summerar till 1.

2.07 Stokastiska variabler är i princip samma sak som slumpförsök: De möjliga värdena för variabeln svarar mot de möjliga utfallen av slumpförsöket.

2.08 Allmänt beskriver formler inom probabilistisk logik **händelser**. En händelse är en mängd möjliga värden som en variabel kan ta. Sannolikheten för en händelse A får vi genom att summera sannolikheterna för alla värden som ingår i den händelsen.

$$P(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

2.09 Teckna och beräkna följande sannolikheter utifrån fördelningen i figur 1.

- Sannolikheten för att det är moln eller regn?
- Sannolikheten för att det inte är soligt?
- Sannolikheten för att det snöar och inte snöar?

2.10 Komplexa probabilistiska modeller innehåller inte bara en variabel utan flera: för att ställa en diagnos vill vi kanske ta hänsyn till resultaten av diverse medicinska test; för att bestämma marsroverns position behöver vi kombinera information från flera kameror och aktuatorer.

2.11 En **simultanfördelning** för två stokastiska variabler X och Y visar sannolikheten för varje möjlig kombination av värden på X och Y. Figur 2 ger ett exempel. En simultanfördelning för X och Y betecknar vi med $P(X, Y)$.

2.12 En simultanfördelning är en sannolikhetsfördelning; i synnerhet måste den uppfylla sannolikhetsaxiomen i 2.06. En simultanfördelning kan ses som en ”vanlig” fördelning för en komplex variabel Z vars värden är alla möjliga par av värden för X och Y.

2.13 Givet en simultanfördelning för två stokastiska variabler X och Y är de atomära logiska påståendena på formen ”variabeln X tar värdet x *och* variabeln Y tar värdet y”. Detta skriver vi som $P(X = x, Y = y)$ eller kortare $P(x, y)$.

$$P(X = \text{sol}, Y = \text{kallt}) = \qquad P(\text{regn}, \text{varmt}) =$$

2.14 Precis som vid vanliga fördelningar kan vi räkna ut sannolikheten för en händelse genom att summera sannolikheterna för alla utfall som ingår i den händelsen. Teckna och beräkna följande sannolikheter för fördelningen i figur 2:

- Sannolikheten för att det är varmt och soligt?
- Sannolikheten för att det är varmt eller soligt?
- Sannolikheten för att det är varmt?

2.15 Vi generaliserar begreppet simultanfördelning till fler än två variabler. I det allmänna fallet med $n \geq 1$ stycken variabler använder vi följande notation:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \qquad P(x_1, \dots, x_n)$$

2.16 Antag att vi har n stycken variabler, var och en med d stycken möjliga värden. En simultanfördelning för dessa variabler kan anges som en tabell. Hur många rader har den tabellen?

Svar:

3 Betingad sannolikhet

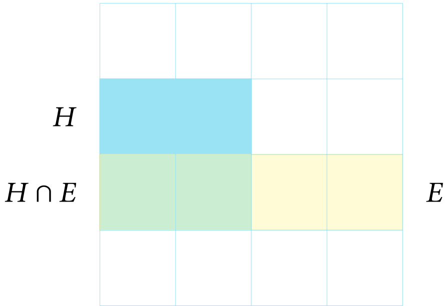
3.01 Ett centralt koncept inom probabilistisk logik är **betingad sannolikhet**. Enkel sannolikhet är vårt mått på hur mycket vi tror på en hypotes H (en händelse). Betingad sannolikhet är vårt mått på hur mycket vi tror på H då vi redan har viss information E (eng. *evidence*).

3.02 Den betingade sannolikheten för H givet E tecknas $P(H \mid E)$ och definieras som

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}$$

3.03 Vad är hypotesen H och informationen E i exemplen med Watson och Curiosity?

3.04 Sammanhanget mellan enkel och betingad sannolikhet kan beskrivas med att man i det ursprungliga utfallsrummet ”zoomar in” på en delmängd av utfallen, nämligen dem som är förenliga med E. Dessa händelser blir till det nya utfallsrummet för H. (Se figur 3.)



Figur 3: Betingad sannolikhet

3.05 Titta på figur 3. Om vi antar att sannolikheten för en händelse är lika med dess andel av rutnätets totala yta, vad är då den obetingade sannolikheten för H och den betingade sannolikheten för H givet att vi vet att E har inträffat?

$$P(H) = \qquad\qquad P(H \mid E) =$$

3.06 Med avseende på H så kallas den obetingade sannolikheten $P(H)$ för **apriorisannolikhet** (”innan E”; eng. *prior probability*) medan den betingade sannolikheten $P(H \mid E)$ kallas för **aposteriosannolikhet** (”efter E”; eng. *posterior probability*).

3.07 Man kan läsa definition 3.02 som en regel för hur en agent ska uppdatera sin säkerhet på hypotesen H när den får informationen E (eng. *belief update*). Notera dock att det inte finns någonting i definitionen som syftar på ett temporalt eller kausalt samband mellan H och E.

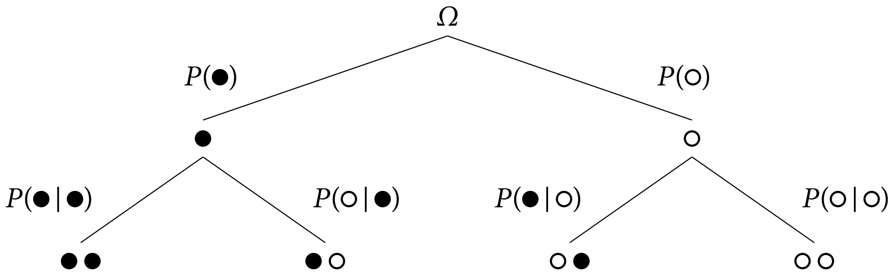
3.08 Ett annat sätt att skriva formeln för betingad sannolikhet går under namnet **multiplikationsregeln**. Den finns i två varianter:

$$P(H \cap E) = P(H \mid E)P(E) \qquad\qquad P(H \cap E) = P(E \mid H)P(H)$$

3.09 Hur kommer man från 3.02 till 3.08?

3.10 I ett träddiagram är sannolikheterna på grenarna beroende på den händelse som är associerad med föräldernoden. Exempel: Vi har en påse med fem kulor, tre svarta och två vita. Vi drar två kulor ur påsen. Sannolikheten för vilken färg den andra kulan har beror på vilken färg den första kulan hade. Situationen illustreras i figur 4. Ange följande sannolikheter:

$$P(\bullet \mid \bullet) = \qquad P(\circ \mid \bullet) = \qquad P(\bullet \mid \circ) = \qquad P(\circ \mid \circ) =$$



Figur 4: Vi drar två kulor ur en burk som i början innehåller tre svarta kulor och två vita kulor. De fyra grenarna längst ned representerar de möjliga utfallen, dvs. ”två svarta kulor”, ”svart kula först, sedan vit kula”, ”vit kula först, sedan svart kula”, ”två vita kulor”.

3.11 När man vill bygga en probabilistisk modell för en betingad sannolikhet är det ofta enklare att bygga en modell för den omvänt betingade sannolikheten. Exempel: En läkare vill ställa en diagnos utifrån kända symptom; men det är enklare att säga någonting om vilka diagnoser som har vilka symptom. **Bayes’ regel** låter oss konvertera mellan de två modellerna.

3.12 **Bayes’ regel.** Denna regel är en av de viktigaste reglerna inom probabilistisk logik och grundläggande för många praktiska tillämpningar inom AI.

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

3.13 Härled Bayes’ regel utifrån multiplikationsregeln (3.08).

3.14 En läkare träffar en patient med nackspärr. Nackspärr kan vara en symptom på sjukdomen meningit; meningit orsakar nackspärr i 70% av alla fall. Apriorisannolikheten för att en patient har meningit är 1/50 000, och apriorisannolikheten för att en patient har nackspärr är 1%. Hur stor är sannolikheten att patienten har meningit?

$P(E \mid H) =$ $\qquad$ $P(H) =$ $\qquad$ $P(E) =$ $\qquad$ $P(H \mid E) =$

4 Inferenser från simultanfördelningen

4.01 Figur 5 visar en simultanfördelning för tre stokastiska variabler X, Y och Z. Beräkna den betingade sannolikheten $P(Z = \text{sol} \mid X = \text{vinter})$.

4.02 Detta avsnitt presenterar en mekanisk teknik för att beräkna betingade sannolikheter utifrån en simultanfördelning. Denna teknik går i två steg: (1) *betinga* på de variabler som har kända värden; (2) *marginalisera* de variabler som inte refereras.

X	Y	Z	P
sommar	varmt	sol	0,30
sommar	varmt	regn	0,05
sommar	kallt	sol	0,10
sommar	kallt	regn	0,05
vinter	varmt	sol	0,10
vinter	varmt	regn	0,05
vinter	kallt	sol	0,15
vinter	kallt	regn	0,20

Figur 5: En simultanfördelning $P(X, Y, Z)$ för tre stokastiska variabler X, Y och Z

4.03 **Steg 1: Betingning.** I exemplet vill vi betinga på X = vinter. Vi väljer ut alla kombinationer av värden (rader) i tabellen som matchar detta datum. Detta ger oss följande nya tabell:

X	Y	Z	P
vinter	varmt	sol	0,10
vinter	varmt	regn	0,05
vinter	kallt	sol	0,15
vinter	kallt	regn	0,20

Denna tabell representerar inte någon sannolikhetsfördelning: Sannolikheterna summerar inte till 1 utan till 0,5. För att lösa detta problem delar vi varje sannolikhet med denna summa; detta kallas **normalisering**. Vi stryker även X-kolumnen.

Y	Z	P	
varmt	sol	0,20	= 0,10/0,50
varmt	regn	0,10	= 0,05/0,50
kallt	sol	0,30	= 0,15/0,50
kallt	regn	0,40	= 0,20/0,50

Denna tabell representerar en **betingad sannolikhetsfördelning**, $P(Y, Z \mid X = \text{vinter})$.

4.04 I samband med betingning används även notationen $P(X \mid Y)$ som syftar på en *familj* av sannolikhetsfördelningar, en fördelning för varje möjligt värde av Y. Beräkna följande (familjer av) betingade fördelningar för simultanfördelningen $P(X, Y)$ i figur 2:

$$P(X \mid Y) \qquad\qquad P(Y \mid X)$$

4.05 **Steg 2: Marginalisering.** Den betingade sannolikheten $P(Z = \text{sol} \mid X = \text{vinter})$ refererar inte till variabeln Y. För att bli av med den slår vi ihop alla rader som endast skiljer sig med avseende på Y till en enda rad vars sannolikhet är summan av alla ursprungliga sannolikheterna. Sedan stryker vi Y-kolumnen.

Z	P	
sol	0,50	= 0,20 + 0,30
regn	0,50	= 0,10 + 0,40

Ur denna tabell kan sannolikheten $P(Z = \text{sol} \mid X = \text{vinter})$ enkelt läsas av.

4.06 Beräkna följande marginalfördelningar för fördelningen $P(X, Y)$ i figur 2.

X	P
sol	
regn	

Y	P
varmt	
kallt	

4.07 När vi vill beräkna en betingad sannolikhet $P(H \mid E)$ utifrån en simultanfördelning kan vi dela in variablerna i simultanfördelningen i tre klasser: (1) **kända variabler**, variabler som förekommer i E; (2) **okända variabler**, variabler som förekommer i H; (3) **gömda variabler**, alla andra variabler. Betingning eliminerar de kända variablerna; marginalisering eliminerar de gömda variablerna.

4.08 Beräkna följande sannolikheter utifrån simultanfördelningen i figur 5. För vilka behöver du använda betingning, för vilka marginalisering?

- $P(\text{regn})$
- $P(\text{regn} \mid \text{vinter}, \text{varmt})$
- $P(\text{regn} \mid \text{vinter})$

5 Bayesianska nät

5.01 Med hjälp av betingning och marginalisering kan man utifrån simultanfördelningen beräkna godtyckliga betingade sannolikheter. Denna metod har dock två stora problem:

1. Beräkningskomplexiteten växer explosionsartat med antalet variabler (se 2.16).
2. Simultanfördelningen är ofta inte är en naturlig modell av problemdomänen.

5.02 Ett sätt att bemöta problemet med den kombinatoriska explosion är att introducera oberoendeantaganden. Två stokastiska variabler X och Y är **oberoende** om

$$\forall x, y\colon P(x, y) = P(x)P(y)$$

Det vill säga, sannolikheten för varje utfall x, y i simultanfördelningen kan skrivas som produkten av sannolikheterna för utfallen x och y.

5.03 Vi kastar ett mynt n gånger. Simultanfördelningen för detta experiment är definierad på n stycken binära variabler (två värden krona/klave) och har 2^n utfall (jmf. 2.16). Då alla variabler är ömsesidigt oberoende kan man faktorisera denna sannolikhetsfördelning i n stycken fördelningar för en binär variabel var (första kastet, andra kastet, osv.). Med denna representation finns endast $2n$ utfall.

5.04 Testa om variablerna X och Y i simultanfördelningen från figur 2 är oberoende: Beräkna de två marginalfördelningarna och en tredje fördelning P^* som du får genom att multiplicera sannolikheterna i marginalfördelningarna.

X	Y	P^*
sol	varmt	
sol	kallt	
regn	varmt	
regn	kallt	

5.05 Det finns få realistiska situationer där två stokastiska variabler verkligen är oberoende. Oberoendeantagandet är nästan alltid en förenkling av verkligheten. Kunskap om vilka variabler som kan antas vara oberoende är expertkunskap om domänen.

5.06 Två stokastiska variabler X och Y är **villkorligt oberoende** given en tredje variabel Z om

$$\forall x, y, z\colon P(x, y \mid z) = P(x \mid z)P(y \mid z)$$

H	T	F	P
−	−	−	0,576
−	−	+	0,144
−	+	−	0,064
−	+	+	0,016
+	−	−	0,008
+	−	+	0,072
+	+	−	0,012
+	+	+	0,108

Figur 6: Simultanfördelning för tandläkardomänen

5.07 Betrakta en probabilistisk modell med tre stycken binära variabler: H ”jag har ett hål i tanden”, T ”jag har tandvärk” och F ”tandläkarens sond fastnar i tanden”. En simultanfördelning för dessa variabler visas i figur 6. Det är rimligt att anta att T och F är villkorligt oberoende givet H: Sonden fastnar oberoende av om jag har tandvärk eller inte; det är hålet som är den gemensamma nämnaren.

5.08 Betrakta en modell med tre stycken stokastiska variabler: E ”eld”, R ”rök” och B ”brandlarmet går”. Vad är ett rimligt antagande angående villkorligt oberoende?

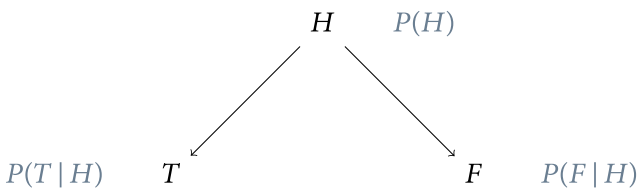
Svar:

5.09 Hur kan ett antagande om villkorligt oberoende hjälpa oss att komma till en mera kompakt representation av en probabilistisk modell? Precis som ett antagande om ovillkorligt oberoende tillåter den oss att faktorisera en simultanfördelning:

$$\begin{aligned} P(H,T,F) &= P(T,F \mid H)P(H) && \text{(multiplikationsregeln, 3.08)} \\ &= P(T \mid H)P(F \mid H)P(H) && (T, F \text{ villkorligt oberoende givet } H) \end{aligned}$$

Notera att varje fördelning i den andra raden har endast två variabler, medan simultanfördelningen i den första raden har tre.

5.10 Ett **bayesianskt nät** är en acyklisk riktad graf där noderna representerar stokastiska variabler och bågarna representerar beroenden mellan dessa variabler. För varje nod anges en sannolikhetsfördelning som är betingad på de variabler som föräldernoderna representerar. Ett exempel för tandläkardomänen visas i figur 7.



H	$P(H)$
+	0,2
−	0,8

T	$P(T \mid +h)$
+	0,6
−	0,4

T	$P(T \mid -h)$
+	0,1
−	0,9

F	$P(F \mid +h)$
+	0,9
−	0,1

F	$P(F \mid -h)$
+	0,2
−	0,8

Figur 7: Ett bayesianskt nät för tandläkardomänen

5.11 Varje bayesianskt nät representerar en simultanfördelning. För att räkna ut ett konkret värde $P(x_1, \ldots, x_n)$ ur denna fördelning gör man följande:

1. Förse varje nod X_i med värdet x_i.
2. För varje nod X_i, skriv ner den betingade sannolikheten för dess associerade värde, givet värdena för dess föräldrar.
3. Multiplicera alla dessa betingade sannolikheter.

5.12 Använd den beskrivna metoden för att beräkna några värden ur simultanfördelningen i figur 6 med hjälp av nätet i figur 7.

5.13 Att konstruera användbara och kompakta bayesianska nät kräver kunskap om problemdomänen. Det är oftast bättre att modellera kausala samband snarare än diagnostiska samband.