

Resolution

Vad är KNF?

Ett logiskt uttryck är skrivet i KNF om det består av en konjunktion ($\wedge$) av *klasuler* där en klausul är disjunktion ($\vee$) av atomära formler (ex. $Gillar(Bob, AI)$, $Människa(Bob)$, $Lever(x)$, ...).

$(K1) \wedge (K2) \wedge (K3) \wedge \dots$

Konvertering till KNF

1. Eliminera implikation
2. Flytta negationer inåt
3. Standardisera variabler
4. Eliminera existenskvantifikator ("skolemisering")
5. Eliminera allkvantifikator
6. Konvertera till konjunktion av disjunktioner (KNF)

Resolutionsprocess

1. Konvertera alla satser till konjunktiv normalform (KNF) (vid behov döp om variabler)
2. Negera vad som ska visas som KNF och lägg till i kunskapsbasen
3. Upprepa till dess en kontradiktion hittas eller annat stoppvillkor
 - a. Välj två klausuler som delar en term och dess komplement (ex. a och $\neg a$)
 - b. Resolventen är disjunktionen av alla termer med lämpliga substitutioner
 - c. Om resolventen är tomma mängden så returnera kontradiktion, annars lägg till resolventen i KB

Logiska ekvivalenser

- | | |
|---|--|
| 1. $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ | kommutativ lag |
| 2. $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ | kommutativ lag |
| 3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \delta) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \delta$ | associativ lag |
| 4. $\alpha \vee (\beta \vee \delta) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \delta$ | associativ lag |
| 5. $\neg \neg \alpha \equiv \alpha$ | dubbelnegationseliminering |
| 6. $\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg \beta \Rightarrow \neg \alpha$ | kontraposition |
| 7. $\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta$ | eliminering av implikation |
| 8. $\alpha \wedge (\beta \vee \delta) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \delta)$ | distributiv lag |
| 9. $\alpha \vee (\beta \wedge \delta) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \delta)$ | distributiv lag |
| 10. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg \beta$ | De Morgan |
| 11. $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg \alpha \vee \neg \beta$ | De Morgan |
| 12. $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$ | negation av allkvantifierare |
| 13. $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$ | negation av existentiell kvantifierare |

Exempel: KNF

Översätt följande mening till predikatlogik, KNF och sist klausuler:

Trollkarlar är människor som kan trollo

Predikatlogik:

1. $\forall x \text{Trollkar}(x) \Rightarrow \text{Människa}(x) \wedge \text{KanTrollo}(x)$

KNF:

1. $\forall x \text{Trollkar}(x) \Rightarrow \text{Människa}(x) \wedge \text{KanTrollo}(x)$
 $\forall x \neg \text{Trollkar}(x) \vee (\text{Människa}(x) \wedge \text{KanTrollo}(x))$
 $\neg \text{Trollkar}(x) \vee (\text{Människa}(x) \wedge \text{KanTrollo}(x))$
 $(\neg \text{Trollkar}(x) \vee \text{Människa}(x)) \wedge (\neg \text{Trollkar}(x) \vee \text{KanTrollo}(x))$ OBS: $\alpha \vee (\beta \wedge \delta) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \delta)$

$(\neg \text{Trollkar}(x) \vee \text{Människa}(x)) \wedge (\neg \text{Trollkar}(x) \vee \text{KanTrollo}(x))$

Klausuler:

1a) $\neg \text{Trollkar}(x) \vee \text{Människa}(x)$

1b) $\neg \text{Trollkar}(y) \vee \text{KanTrollo}(y)$

Exempel: Resolution

Givet

1. $\text{Katt}(\text{Bob})$
2. $\forall x \text{Katt}(x) \Rightarrow \exists y \text{Klöser}(x, y)$

visa att Bob löser på något:

$\exists z \text{Klöser}(\text{Bob}, z)$

KNF:

1. $\text{Katt}(\text{Bob})$
2. $\forall x \text{Katt}(x) \Rightarrow \exists y \text{Klöser}(x, y)$
 $\forall x \neg \text{Katt}(x) \vee \exists y \text{Klöser}(x, y)$
 $\forall x \neg \text{Katt}(x) \vee \text{Klöser}(x, k(x))$
 $\neg \text{Katt}(x) \vee \text{Klöser}(x, k(x))$
3. $\neg \exists z \text{Klöser}(\text{Bob}, z)$
 $\forall z \neg \text{Klöser}(\text{Bob}, z)$
 $\neg \text{Klöser}(\text{Bob}, z)$

byt existentiell kvantifierad variabel, k är en skolfunktion

motsatsen till det vi vill visa

1	$\text{Katt}(\text{Bob})$	
2	$\neg \text{Katt}(x) \vee \text{Klöser}(x, k(x))$	
3	$\neg \text{Klöser}(\text{Bob}, z)$	
4	$\neg \text{Katt}(\text{Bob})$	2 + 3 med $\{x/\text{Bob}, z/k(\text{Bob})\}$
5	Motsägelse	1 + 4

OBS: Eftersom alla kvarvarande variabler är allkvantifierade får vi byta ut dem mot vad som helst.

Övningar

Översätt följande meningar till predikatlogiska uttryck

1. Milo är en hund
2. All hundar skäller
3. Inga katter skäller
4. Någon varg skäller

1	Hund(Milo)
2	$\forall x \text{ Hund}(x) \Rightarrow \text{Skäller}(x)$
3	$\forall x \text{ Katt}(x) \Rightarrow \neg \text{Skäller}(x)$ alternativt $\neg \exists x \text{ Katt}(x) \wedge \text{Skäller}(x)$ eftersom $\forall x \neg \text{Katt}(x) \vee \neg \text{Skäller}(x) \equiv \forall x \neg (\text{Katt}(x) \wedge \text{Skäller}(x)) \equiv \neg \exists x \text{ Katt}(x) \wedge \text{Skäller}(x)$ De Morgan Regel 13
4	

Översätt följande meningar till predikatlogiska uttryck

1. Bengt är en katt
2. Alla katter klöser på något
3. Vissa katter har inte någon päls
4. En katt utan päls är bra för pälsallergiker

1	Katt(Bengt)
2	$\forall x \text{ Katt}(x) \Rightarrow \exists y \text{ KlöserPå}(x, y)$
3	$\exists x \text{ Katt}(x) \wedge \neg \text{Päls}(x)$ <i>Någon katt har inte päls</i> alternativt $\neg \forall x \text{ Katt}(x) \Rightarrow \text{Päls}(x)$ <i>Det är inte sant att alla katter har päls</i>
4	$\forall x \text{ Katt}(x) \wedge \neg \text{Päls}(x) \Rightarrow \text{BraFörAllergi}(x)$ <i>Alla pälslösa katter är bra för allergiker</i> Om vi inte tolkar det som en allmän regel att en pälslös katt är bra för allergiker utan som att det finns <i>någon</i> sådan katt: $\exists x \text{ Katt}(x) \wedge \neg \text{Päls}(x) \Rightarrow \text{BraFörAllergi}(x)$ <i>Det existerar en pälslös katt som är bra för allergiker</i>

Skriv om följande till KNF

1. $A \vee B \Rightarrow C$
2. $P \wedge Q \Rightarrow R$
3. $\neg(A \vee B) \Rightarrow C$
4. $(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow D$
5. $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$
6. $\neg \forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$
7. $\exists y A(y) \Rightarrow B(y)$
8. $\forall x \exists y P(x) \Rightarrow Q(x, y)$

skolemkonstant

skolemfunktion

1	$A \vee B \Rightarrow C$ $\neg(A \vee B) \vee C$ $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$ $C \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $(C \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg B)$	regel 7 De Morgan byt ordning för att underlätta regel 9
2	$P \wedge Q \Rightarrow R$ $\neg(P \wedge Q) \vee R$ $\neg P \vee \neg Q \vee R$	regel 7 (fel justerat 2026-01-01)
3	$\neg(A \vee B) \Rightarrow C$ $\neg \neg(A \vee B) \vee C$ $(A \vee B) \vee C$ $A \vee B \vee C$	regel 7 regel 5
4	$(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow D$ $\neg(A \vee (B \wedge C)) \vee D$ $(\neg A \wedge \neg(B \wedge C)) \vee D$ $(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)) \vee D$ $D \vee (\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C))$ $D \vee (\neg A \wedge \delta)$ $(D \vee \neg A) \wedge (D \vee \delta)$ $(D \vee \neg A) \wedge (D \vee (\neg B \vee \neg C))$ $(D \vee \neg A) \wedge (D \vee \neg B \vee \neg C)$	regel 7 De Morgan De Morgan byt ordning för att underlätta byt tillfälligt ut $(\neg B \vee \neg C)$ mot δ för att underlätta regel 9 byt in δ mot $(\neg B \vee \neg C)$
5	$\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$ $\forall x \neg P(x) \vee Q(x)$ $\neg P(x) \vee Q(x)$	regel 7 eliminera allkvantifikator
6	$\neg \forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$ $\neg \forall x \neg P(x) \vee Q(x)$ $\exists x \neg(\neg P(x) \vee Q(x))$ $\exists x \neg \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$ $\exists x P(x) \wedge \neg Q(x)$ $P(C) \wedge \neg Q(C)$	regel 7 regel 12 regel 11 regel 5 där C är en skolemkonstant (eliminera existenskvantifikator)
7	$\exists y A(y) \Rightarrow B(y)$ $\exists y \neg A(y) \vee B(y)$ $\neg A(C) \vee B(C)$	regel 7 där C är en skolemkonstant
8	$\forall x \exists y P(x) \Rightarrow Q(x, y)$ $\forall x \exists y \neg P(x) \vee Q(x, y)$ $\forall x \neg P(x) \vee Q(x, g(x))$ $\neg P(x) \vee Q(x, g(x))$	regel 7 där g är en skolemfunktion, dvs. y är ett värde som hör ihop med x eliminera allkvantifikator

Visa att $\text{Gillar}(\text{Mary}, \text{Bob})$ gäller med hjälp av resolution:

1. $\forall x, y \text{ Gillar}(x, y) \Rightarrow \text{Gillar}(y, x)$
2. $\text{Gillar}(\text{Bob}, \text{Mary})$

Ger klausulerna:

1. $\neg \text{Gillar}(x, y) \vee \text{Gillar}(y, x)$
2. $\text{Gillar}(\text{Bob}, \text{Mary})$

Motsatsen till det vi vill visa:

3. $\neg \text{Gillar}(\text{Mary}, \text{Bob})$

1	$\neg \text{Gillar}(x, y) \vee \text{Gillar}(y, x)$	
2	$\text{Gillar}(\text{Bob}, \text{Mary})$	
3	$\neg \text{Gillar}(\text{Mary}, \text{Bob})$	
4	$\text{Gillar}(\text{Mary}, \text{Bob})$	1 + 2 med $\{x/\text{Bob}, y/\text{Mary}\}$
5	Motsägelse	3 + 4

Visa med resolution att Bob är glad:

1. $\forall x \text{ Leker}(x) \Rightarrow \text{Glad}(x)$
2. $\text{Hund}(\text{Bob})$
3. $\forall x \text{ Hund}(x) \wedge \neg(\text{Sover}(x) \vee \neg\text{Ung}(x)) \Rightarrow \text{Leker}(x)$
4. $\text{Ung}(\text{Bob}) \wedge \neg\text{Sover}(\text{Bob})$

KNF:

1. $\neg\text{Leker}(x) \vee \text{Glad}(x)$
2. $\text{Hund}(\text{Bob})$
3. $\forall x \text{ Hund}(x) \wedge \neg(\text{Sover}(x) \vee \neg\text{Ung}(x)) \Rightarrow \text{Leker}(x)$
 $\forall x \neg(\text{Hund}(x) \wedge \neg(\text{Sover}(x) \vee \neg\text{Ung}(x))) \vee \text{Leker}(x)$
 $\neg(\text{Hund}(x) \wedge \neg(\text{Sover}(x) \vee \neg\text{Ung}(x))) \vee \text{Leker}(x)$
 $(\neg\text{Hund}(x) \vee \neg\neg(\text{Sover}(x) \vee \neg\text{Ung}(x))) \vee \text{Leker}(x)$
 $(\neg\text{Hund}(x) \vee (\text{Sover}(x) \vee \neg\text{Ung}(x))) \vee \text{Leker}(x)$
 $\neg\text{Hund}(x) \vee \text{Sover}(x) \vee \neg\text{Ung}(x) \vee \text{Leker}(x)$
 $\neg\text{Hund}(y) \vee \text{Sover}(y) \vee \neg\text{Ung}(y) \vee \text{Leker}(y)$
4. $\text{Ung}(\text{Bob}) \wedge \neg\text{Sover}(\text{Bob})$

Byt namn på x för att inte krocka med 1

Ger klausulerna:

1. $\neg\text{Leker}(x) \vee \text{Glad}(x)$
2. $\text{Hund}(\text{Bob})$
3. $\neg\text{Hund}(y) \vee \text{Sover}(y) \vee \neg\text{Ung}(y) \vee \text{Leker}(y)$
- 4a. $\text{Ung}(\text{Bob})$
- 4b. $\neg\text{Sover}(\text{Bob})$

Motsatsen till det vi vill visa:

5. $\neg\text{Glad}(\text{Bob})$

1	$\neg\text{Leker}(x) \vee \text{Glad}(x)$	
2	$\text{Hund}(\text{Bob})$	
3	$\neg\text{Hund}(y) \vee \text{Sover}(y) \vee \neg\text{Ung}(y) \vee \text{Leker}(y)$	
4a	$\text{Ung}(\text{Bob})$	
4b	$\neg\text{Sover}(\text{Bob})$	
5	$\neg\text{Glad}(\text{Bob})$	
6	$\text{Sover}(\text{Bob}) \vee \neg\text{Ung}(\text{Bob}) \vee \text{Leker}(\text{Bob})$	2 + 3 med {y/Bob}
7	$\neg\text{Ung}(\text{Bob}) \vee \text{Leker}(\text{Bob})$	4b + 6
8	$\text{Leker}(\text{Bob})$	4a + 7
9	$\text{Glad}(\text{Bob})$	1 + 8 med {x/Bob}
10	Motsägelse	5 + 10