

729G78 Artificiell intelligens

Kunskapsrepresentation - Predikatlogik

Robin Keskisärkkä

HCS/IDA

Sundhet och fullständighet

Metaspråk

- Satslogiken kallas objektspråk med operatorer som t.ex. $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$

Alternativa symboler $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ eller $\supset$ för $\Rightarrow$

- Metaspråk beskriver egenskaper om objektspråket

$\equiv$ Två objektspråksformler är lika, ex. $\neg A \vee B \equiv A \Rightarrow B$

$\models$ En formel är en logisk konsekvens av en annan, ex. $A \wedge B \models A$

$\models$ beror av satsernas sanningsvärden (semantik)

$\vdash$ En formel kan härledas ur andra

$\vdash$ beror bara av satsernas form (syntax)

Sundhet och fullständighet

- Vi vill att vårt logiska system ska kunna **bevisa allt som är sant och inget annat**
- Ett logiskt system KB är **sunt** om
 $KB \vdash \alpha \implies KB \models \alpha$ dvs alla formler som kan **härledas syntaktiskt** är **logiskt giltiga**
- Ett logiskt system är **fullständigt** om
 $KB \models \alpha \implies KB \vdash \alpha$ dvs **alla formler som är logiskt giltiga kan härledas syntaktiskt**
- Satslogiken är sund och fullständig

Sundhet, exempel 1

Gå igenom varje regel och kolla om vi hitta logiska konsekvenser som inte är sanna.

Ex. Är *modus ponens* sund?

$K, K \Rightarrow L \vdash L$ och $K, K \Rightarrow L \models L$?

K	L	$K \Rightarrow L$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S



L är sann på varje rad där K och $K \Rightarrow L$ är sanna

(K: "AI är kul" och L: "Folk är lyckliga", dvs om K och $K \Rightarrow L$ så L dvs folk är lyckliga)

Sundhet, exempel 2

Hur är det med $L, K \Rightarrow L \vdash K$ och $L, K \Rightarrow L \models K$?

K	L	$K \Rightarrow L$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S



Inte sund. Det finns rader då $L, K \Rightarrow L$ är sann med K falsk
 $L, K \Rightarrow L \not\models K$ (Folk kan vara lyckliga utan att AI är kul)

Detta är *inte* en regel i satslogiken

Fullständighet

- Alla logiska konsekvenser är härledda formler
- Besvärligare att visa, hur vet vi att allt kan härledas
- Räcker t.ex. inte med Modus ponens
 $K, K \vee M \Rightarrow L \models L$, dvs om K sann så är L en logisk konsekvens
men inte $K, K \vee M \Rightarrow L \vdash L$ eftersom modus ponens inte räcker för att härleda L , lägg till $\vee I$ så går det
 - Syntaktiskt så behöver vi inferensregler för att göra systemet fullständigt
- Fler eller andra inferensregler kan ge ett fullständigt system
- Resolution är fullständig

Sundhet och fullständighet

- Vi vill att vårt logiska system ska kunna bevisa allt som är sant och inget annat
- Sundhet
 - Inga ogiltiga formler kan härledas
- Fullständighet
 - Alla giltiga formler kan härledas

Predikatlogik

Predikatlogik

Problem med satslogik

- Världen är mer än ett antal atomiska fakta
 - Bob gillar AI, Marie gillar AI, ...
- Istället objekt och relationer mellan objekt
 - $GillarAI(Bob)$ eller $Gillar(Bob, AI)$
 - $Gillar(x, y)$ där y kan vara AI och x kan vara Bob, Marie, ... etc.

Syntaktiska element

- Termer, refererar till objekt
 - Konstanter (A, B, Al, Bob, ...)
 - Variabler (x, y, z ...)
 - Funktioner av termer ($f(x)$, $g(x, Al, z)$, $addera(1, 2, 3)$, ...)*
- Formler
 - Atomära formler
 - Atomära satser
 - Predikat applicerade på termer, $P(x, y)$, $R(\text{Bob}, z)$, $Gillar(\text{Bob}, Al)$, ...
 - Formler med konnektiv ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$) samt identitet ($=$)
 - Kvantifierade formler ($\forall$ (alla) och $\exists$ (minst en))

Syntaxexempel, 1

- Bob gillar AI

GillarAI(Bob) där Bob är en konstant

- Bob och Paul är bröder

Bröder(Bob, Paul) eller Bror(Bob, Paul) eller BrorTill(Bob, Paul)

- Glad(x), Glad(x, t), Glad(x, l, t) där x, l och t är variabler

Glad(Paul), Glad(Paul, 1999-12-31), Glad(Paul, Malmö, 1999-12-31)

- störreÄn(1,2) funktion som returnerar ett sanningsvärde

- $\forall x \text{ Glad}(x)$ Alla är glada

$\exists x \text{ Glad}(x)$ Någon är glad

- $\forall x, y \text{ Bror}(x, y) \Leftrightarrow \text{Bror}(y, x)$

Bundna och fria variabler

- $P(x)$, x kallas fri variabel
- $\forall x P(x)$, variabeln x *bunden* av $\forall$
- $\exists x P(x)$, variabeln x *bunden* av $\exists$
- Kvantifierare har räckvidd

- $\forall x P(x) \wedge Q(x)$

Tolkas av *vissa* författare som att andra x fritt och kräver parenteser för att förtydliga

- $\forall x, y P(x, y) \implies \exists z S(z) \wedge Q(x, y, z)$

Vi kommer att tolka x och y som bundna av $\forall$ i vänsterledet om vi inte explicit introducerar dem igen eller parenteser begränsar deras räckvidd

Syntaxexempel, 2

- $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$
Den som gillar AI är glad
 $\forall x \text{GillarAI}(x) \Rightarrow \text{Glad}(x)$
- $\forall x P(x) \wedge Q(x)$
 $\forall x \text{GillarAI}(x) \wedge \text{Glad}(x)$
Alla gillar AI och alla är glada
- $\exists x P(x) \wedge Q(x)$
 $\exists x \text{GillarAI}(x) \wedge \text{Glad}(x)$
Någon gillar AI och är glad
- $\exists x P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee Q(x)$
 $\exists x \text{GillarAI}(x) \Rightarrow \text{Glad}(x) \equiv \exists x \neg \text{GillarAI}(x) \vee \text{Glad}(x)$
Någon gillar inte AI eller är glad

Syntaxexempel, 3

- $\exists x, y \text{ Bror}(x, \text{Pia}) \wedge \text{Bror}(y, \text{Pia}) \wedge \neg(x=y)$
Pia har (minst) två bröder (brodern x är inte samma som y)
- $\exists x \forall y \text{ Gillar}(x, y)$
Det finns någon som gillar alla
- $\forall x \exists y \text{ Gillar}(x, y)$
Alla gillar någon
- $\forall x P(x) \implies \exists y Q(y) \wedge H(x, y)$
Älgar har horn
 $\forall x \text{ Älg}(x) \implies \text{HarHorn}(x)$
 $\forall x \text{ Älg}(x) \implies \exists y \text{ Horn}(y) \wedge \text{Har}(x, y)$

Syntaxexempel, 4

- Alla kogvetare är snälla
 $\forall x \text{ Kogvetare}(x) \Rightarrow \text{Snäll}(x)$
- Några kogvetare är inte snälla
 $\exists x \text{ Kogvetare}(x) \wedge \neg \text{Snäll}(x)$ eller $\exists x \neg \text{Snäll}(x) \Rightarrow \text{Kogvetare}(x)$
- Alla som känner Paul är kända av Bob
 $\forall x \text{ Känner}(x, \text{Paul}) \Rightarrow \text{Känner}(\text{Bob}, x)$
- Alla människor tycker om någon människa
 $\forall x \text{ Människa}(x) \Rightarrow \exists y \text{ Människa}(y) \wedge \text{TyckerOm}(x, y)$
- Någon människa tycker om alla människor
 $\exists x \text{ Människa}(x) \wedge \forall y \text{ Människa}(y) \Rightarrow \text{TyckerOm}(x, y)$

Semantik för predikatlogik

Semantik

- Semantiken för satslogik:
 - Satsen BobGillarAI är sann i alla modeller där det är sant, dvs.
 $I(\text{BobGillarAI}, m) = \text{sant}$
- Predikatlogik har objekt i världen
GillarAI(Bob)
 $I(\text{GillarAI}(\text{Bob})) = \text{sant}$
- Variabler refererar till olika objekt i en domän
GillarAI(x)
 $I(\text{GillarAI}(x))$ sant för de individer, x, där GillarAI är sant

Domän

- Exempel: Blocks world

Objekt i världen: **A, B, C, Golv**

Relationer i världen: **On, Clear**

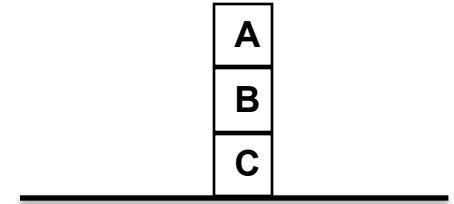
Givna genom **On** = {<A, B>, <B, C>, <C, Golv>}, **Clear**={<A>}

- I predikatlogik behövs då:

Predikatlogiska objektkonstanter: A, B, C, Golv

Binär relationskonstant: On(x, y)

Unär relationskonstant: Clear(x)



Modeller och tolkning

- Relationer i Blocks world

$On = \{ \langle A, B \rangle, \langle B, C \rangle, \langle C, Golv \rangle \}, Clear = \{ \langle A \rangle \}$

- Modellen m i Blocks world

$I(On(A, B), m) = \text{sant}$

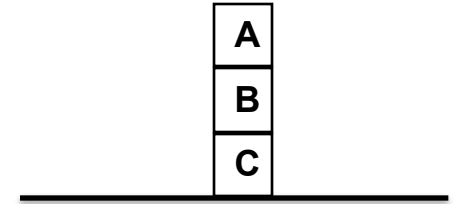
$I(On(B, A), m) = \text{falskt}$

$I(Clear(A), m) = \text{sant}$

$I(Clear(B), m) = \text{falskt}$

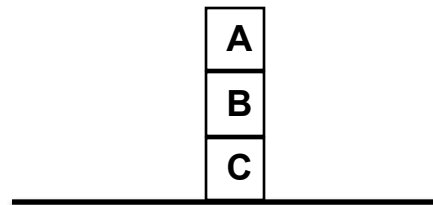
$I(On(A, B) \wedge \neg On(A, Golv), m) = \text{sant}$

etc.



Semantik för kvantifierare

- $\forall x P(x)$ är sann om $P(x)$ är sann för alla tilldelningar av variabeln x till objekt i domänen



- I implikationer begränsas domänen av premissen

$\forall x, y \text{ On}(x, y) \Rightarrow \neg \text{Clear}(y)$, x och y kan tilldelas A, B, C eller Golv

$x = A, y = B$ ger $\text{On}(A, B) \Rightarrow \neg \text{Clear}(B)$

$x = B, y = C$ ger $\text{On}(B, C) \Rightarrow \neg \text{Clear}(C)$

...

- $\exists x P(x)$ är sann om det finns *något objekt* som gör $P(x)$ sann

$\exists x \text{ Clear}(x)$ är bara sant om $x=A$

Samband mellan kvantifierare

- $\forall x \text{ GillarAI}(x)$ innebär $\neg \exists x \neg \text{GillarAI}(x)$
"Alla gillar AI" "Ingen finns som inte gillar AI"
- $\exists x \neg \text{GillarAI}(x)$ innebär $\neg \forall x \text{ GillarAI}(x)$
"Någon gillar inte AI" "Inte alla gillar AI"
- Mer generellt (jmf med hur man flyttar negationer med de Morgan)
 $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$
 $\exists x \neg P(x) \equiv \neg \forall x P(x)$
 $\forall x \neg P(x) \equiv \neg \exists x P(x)$
 $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

Övningsuppgift

1. Alla grönsaker är nyttiga

1. $\forall x \text{ Grönsak}(x) \Rightarrow \text{Nyttig}(x)$

För alla x, om x är en grönsak så är x nyttig.

2. Äter man nyttigt så äter man grönsaker

2. $\forall x \text{ ÄterNyttigt}(x) \Rightarrow \exists y \text{ Äter}(x, y) \wedge \text{Grönsak}(y)$

För alla x som äter nyttigt så finns det någon grönsak y som x äter.

3. Äter man äter onyttigt så äter man inga grönsaker

3. $\forall x \neg \text{ÄterNyttigt}(x) \Rightarrow \forall y \text{ Äter}(x, y) \wedge \neg \text{Grönsak}(y)$

För alla x som äter onyttigt så är alla y de äter inte grönsak

4. Maja äter grönsaker

4. $\exists x \text{ Äter}(\text{Maja}, x) \wedge \text{Grönsak}(x)$

Det finns något x som Maja äter som är en grönsak

5. Martin äter inte grönsaker

5. $\forall x \text{ Äter}(\text{Martin}, x) \Rightarrow \neg \text{Grönsak}(x)$

För alla x som Martin äter så är x inte en grönsak.

(Allt som Martin äter är inte grönsaker)

Äter Maja nyttigt?

liu UNIVERSITET **lin** UNIVERSITET **det** UNIVERSITET **någon** UNIVERSITET **som** UNIVERSITET **inte** UNIVERSITET **äter** UNIVERSITET **grönsaker?**

Sammanfattning

- Predikatlogiken introducerar relationer och variabler
- Variabler kan vara bundna eller obundna
- Kvantifierare
 - Allkvantifikator: $\forall$ (alla)
 - Existentiell kvantifikator: $\exists$ (minst en, någon)
- Många regler är överförbara från satslogiken