

729G78 Artificiell intelligens

Kunskapsrepresentation – Satslogik 2

Robin Keskisärkkä

HCS/IDA

Semantik för satslogik

Modell

- Formlerna är bara symboler, syntax
- Semantiken ger mening
- En modell m är en tilldelning av sanningsvärden till symbolerna
- Exempel, symbolerna A och B ger 4 möjliga modeller

	A	B
m1	F	F
m2	F	T
m3	T	F
m4	T	T

Egenskaper hos en formel

- Tautologi
 - Sann för alla möjliga tilldelningar, T (tautologi)
 - $A \vee \neg A$
- Kontradiktion
 - Falsk för alla möjliga tilldelningar, $\perp$ (falsum)
 - $A \wedge \neg A$
- Kontingent
 - Varken tautologi eller kontradiktion. Sann för vissa tilldelningar falsk för andra
 - $A \wedge B$

$$A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow C \equiv (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)$$

Exempel

$A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow C$ är en tautologi

Visa med hjälp av

- Sanningstabell
- Motsägelsebevis

Sanningstabell

$A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow C$ är en tautologi

Det finns 8 olika modeller

	A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow C$
m1	T	T	T	T	T	T
m2	T	T	F	T	F	T
m3	T	F	T	F	T	T
m4	T	F	F	F	T	T
m5	F	T	T	T	T	T
m6	F	T	F	T	F	T
m7	F	F	T	T	T	T
m8	F	F	F	T	T	T

Sanningstabell

$A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow C$ är en tautologi

Det finns 8 olika modeller

	A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow C$
m1	T	T	T	T	T	T
m2	T	T	F	T	F	T
m3	T	F	T	F	T	T
m4	T	F	F	F	T	T
m5	F	T	T	T	T	T
m6	F	T	F	T	F	T
m7	F	F	T	T	T	T
m8	F	F	F	T	T	T

Motsägelsebevis

Antag kontradiktion, dvs $A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow C$ är falsk

$A \Rightarrow B$ är bara falsk om A är sann och B är falsk

$B \Rightarrow C$ är bara falsk om B är sann och C är falsk

Disjunktionen är bara falsk om båda är falska, dvs om B både sann och falsk, vilket inte är möjligt, alltså T

Genom omskrivning?

$$A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow C \quad \equiv$$

$$(\neg A \vee B) \vee B \Rightarrow C \quad \equiv$$

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee C) \quad \equiv$$

$$\neg A \vee B \vee \neg B \vee C \quad \equiv$$

$$\neg A \vee \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B} \vee C$$

Sann för alla möjliga tilldelningar, T (tautologi)

Tolkningsfunktion

- Antag att α är en formel och m en modell
- Tolkningsfunktionen $I(\alpha, m)$ avgör om det finns en modell som gör formeln satisfierbar (SAT)
 - Sant om m satisfierar α
 - Falskt om m **inte** satisfierar α
- Ex. antag att $\alpha = A \wedge \neg B$
 - $I(\alpha, m1) = F$
 - $I(\alpha, m3) = T$
 - Etc.

	A	B	$A \wedge \neg B$
m1	F	F	F
m2	F	T	F
m3	T	F	T
m4	T	T	F

Logisk konsekvens

- Slutsatserna är en logisk konsekvens av premisserna (*entailment*)
- Skrivs $\alpha \models \beta$ dvs β är en logisk konsekvens av α
(varje modell av α är också en modell av β)

Exempel

$$A \wedge \neg B \models A$$

A är sann i varje tolkning där $A \wedge \neg B$ sann

- Tautologi om man inte har vänsterled, t.ex.
 $\models A \vee \neg A$
- Sanningstabeller kan användas för att testa logisk konsekvens men tabellen växer exponentiellt (2^n där n är antal satser)

Logisk konsekvens, sanningsstabell

$$\{P \Rightarrow R, R \Rightarrow Q\} \models P \Rightarrow Q$$

*I alla modeller där
 $P \Rightarrow R$ och $R \Rightarrow Q$ sanna
så är $P \Rightarrow Q$ sann*

P	R	Q	$P \Rightarrow R$	$R \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$
F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

Mängdnotationen

$\{P \Rightarrow R, R \Rightarrow Q\}$

motsvarar

$P \Rightarrow R \wedge R \Rightarrow Q$

Logisk konsekvens, sanningsstabell

$$\{P \Rightarrow R, R \Rightarrow Q\} \models P \Rightarrow Q$$

*I alla modeller där
 $P \Rightarrow R$ och $R \Rightarrow Q$ sanna
så är $P \Rightarrow Q$ sann*

Explosionsprincipen: Vad som helst kan härledas från en motsägelse.

Månen är gjord av ost, därför är jag kung av Sverige.

P	R	Q	$P \Rightarrow R$	$R \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$
F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

Inferens för satslogik

Ingen skillnad i klassisk logik mellan
 $\models$ semantisk härledning
 $\vdash$ syntaktisk härledning

Inferens

- Syntaktiska härledningar
 - Opererar direkt på syntaxen, ingen semantik, $\vdash$
- Olika typer:
 - Naturlig deduktion
 - Framåtinferens (söker från reglerna framåt)
 - Bakåtinferens (söker från reglerna bakifrån)
 - Resolution

Naturlig deduktion

- Förutsätter *sundhet* och *fullständighet*
- Inför premisser
- Härledningsregler (deduktionsregler)
 - Introduktionsregler
 - Eliminationsregler
- Säkerställer att slutsatsen bara beror av premisserna
- Kan göra antaganden, t.ex. *reductio ad absurdum*

Naturlig deduktion

Allt som kan bevisas är sant

- Förutsätter *sundhet* och *fullständighet*
- Inför premisser
- Härledningsregler (deduktionsregler)
 - Introduktionsregler
 - Eliminationsregler
- Säkerställer att slutsatsen bara beror av premisserna
- Kan göra antaganden, t.ex. reductio ad absurdum

Allt som är sant kan bevisas

Reductio ad absurdum

Används för motsägelsebevis

- Antag motsatsen, påvisa en motsägelse och dra slutsatsen
- Om mängden teorem $\mathcal{A}$ har en modell men inte $\mathcal{A} \cup \neg\alpha$ så $\mathcal{A} \models \alpha$
- Ex.

$\mathcal{A} = \{\neg A, B \wedge C\}$ har en modell då A är falsk och B och C båda sanna.

Om vi lägger till $\neg B$:

$\mathcal{A}' = \{\neg A, B \wedge C, \neg B\}$ nu finns ingen modell eftersom B inte kan vara både sann och falsk och således kan vi härleda B:

$\mathcal{A} \models B$

Deduktionsregler, exempel

- Modus Ponens

$$\frac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

dvs om $\alpha \Rightarrow \beta$ och α är givna så kan man sluta sig till β
 $\{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta\} \vdash \beta$

- **Premisser** ovan strecket och **slutsatser** under

Deduktion, exempel

Visa att

$$\{R, R \Rightarrow W, W \Rightarrow S\} \vdash S$$
$$\{R, R \Rightarrow W, W \Rightarrow S\}$$

Modus ponens

$$\{R, R \Rightarrow W\} \vdash W$$
$$\{R, R \Rightarrow W, W \Rightarrow S, W\}$$

Modus ponens igen

$$\{W \Rightarrow S, W\} \vdash S$$
$$\{R, R \Rightarrow W, W \Rightarrow S, W, S\}$$

W kom med på köpet men vi hade kunnat sluta så snart vi härlett S

Bevisregler i naturlig deduktion

Introduktionsregler

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\perp} \quad \perp I$$

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} \quad \wedge I$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \vee I$$

$$\frac{\alpha \quad \perp}{\neg\alpha} \quad \neg I$$

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \Rightarrow \beta} \quad \Rightarrow I$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\alpha \Leftrightarrow \beta} \quad \Leftrightarrow I$$

Eliminationsregler

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \wedge E$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \alpha \Rightarrow \delta \quad \beta \Rightarrow \delta}{\delta} \quad \vee E$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} \quad \Rightarrow E$$

$$\frac{\neg\alpha \quad \perp}{\alpha} \quad \neg E$$

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta} \quad \Leftrightarrow E$$

Exempel

- Ingen rök utan eld, såvida ingen röker
 - Det finns alltid någon som feströker
 - Det är fest
 - Visa att det ryker
- | | |
|---------------------------------------|---------------------|
| 1. Eld $\vee$ Röker $\Rightarrow$ Rök | |
| 2. Fest $\Rightarrow$ Röker | |
| 3. Fest | |
| 4. Röker | 2,3 $\Rightarrow$ E |
| 5. Eld $\vee$ Röker | 5 VI |
| 6. Rök | 1,6 $\Rightarrow$ E |

$\{\text{Eld} \vee \text{Röker} \Rightarrow \text{Rök}, \text{Fest} \Rightarrow \text{Röker}, \text{Fest}\} \vdash \text{Rök}$

Bevisschema

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	A_1	Premiss
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
{Beror av regel}	i	A_i	Radnummer, regel
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
{Bara premisser}	x	B	Slutsats

Premissmängderna räknas ut som:

- Unionen av premissmängder för $\perp I$, $\wedge I$, $\wedge E$, $\vee I$, $\vee E$, $\Rightarrow E$, $\Leftrightarrow I$, $\Leftrightarrow E$
- Differensen av premissmängder för $\neg I$, $\neg E$, $\Rightarrow I$

Exempel, 1

Visa att $\{A, \neg(A \wedge \neg B)\} \vdash B$

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel

Exempel, 1

Visa att $\{A, \neg(A \wedge \neg B)\} \vdash B$

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	A	Premiss

Exempel, 1

Visa att $\{A, \neg(A \wedge \neg B)\} \vdash B$

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	A	Premiss
{2}	2	$\neg(A \wedge \neg B)$	Premiss

Exempel, 1

Visa att $\{A, \neg(A \wedge \neg B)\} \vdash B$

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	A	Premiss
{2}	2	$\neg(A \wedge \neg B)$	Premiss
{3}	3	$\neg B$	Antagande*

Exempel, 1

Visa att $\{A, \neg(A \wedge \neg B)\} \vdash B$

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	A	Premiss
{2}	2	$\neg(A \wedge \neg B)$	Premiss
{3}	3	$\neg B$	Antagande*
{1, 3}	4	$A \wedge \neg B$	1, 3 $\wedge I$

Exempel, 1

Visa att $\{A, \neg(A \wedge \neg B)\} \vdash B$

Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
{1}	1	A	Premiss
{2}	2	$\neg(A \wedge \neg B)$	Premiss
{3}	3	$\neg B$	Antagande*
{1, 3}	4	$A \wedge \neg B$	1, 3 $\wedge I$
{1, 2, 3}	5	$\perp$	2, 4 $\perp I$

Exempel, 1

Visa att $\{A, \neg(A \wedge \neg B)\} \vdash B$

	Premissmängd	Radummer	Formel	Regel
	{1}	1	A	Premiss
	{2}	2	$\neg(A \wedge \neg B)$	Premiss
	{3}	3	$\neg B$	Antagande*
	{1, 3}	4	$A \wedge \neg B$	1, 3 $\wedge I$
	{1, 2, 3}	5	$\perp$	2, 4 $\perp I$
Bara premisser →	{1, 2}	6	B	3, 5 $\neg E$

Exempel, 2

Visa att $A \Rightarrow C \vdash (C \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Premissmängd	Radnummer	Formel	Regel
{1}	1	$A \Rightarrow C$	Premiss
{2}	2	A	Antagande
{3}	3	B	Antagande
{1, 2}	4	C	$1, 2 \Rightarrow E$
{1, 2, 3}	5	$C \Rightarrow B$	$3, 4 \Rightarrow I$
{2, 3}	6	$A \Rightarrow B$	$2, 3 \Rightarrow I$
{1}	7	$(C \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$5, 6 \Rightarrow I$

Några strategier

1. Härledning av $\neg\alpha$
Antag α , härled $\perp$ och använd $\neg I$
2. Härledning av $\alpha \wedge \beta$
Härled α och β var för sig och använd $\wedge I$
3. Härledning av $\alpha \vee \beta$
Reductio ad absurdum, antag $\neg(\alpha \vee \beta)$, använd de Morgan $\neg\alpha \wedge \neg\beta$, generera $\perp$ och avsluta med $\neg E$
4. Härledning av $\alpha \Rightarrow \beta$
Antag α , härled β och använd $\Rightarrow I$
5. Härledning av $\alpha \Leftrightarrow \beta$
Härled $\alpha \Rightarrow \beta$ och $\beta \Rightarrow \alpha$ och använd $\Leftrightarrow I$

Framåt- och bakåtinferens

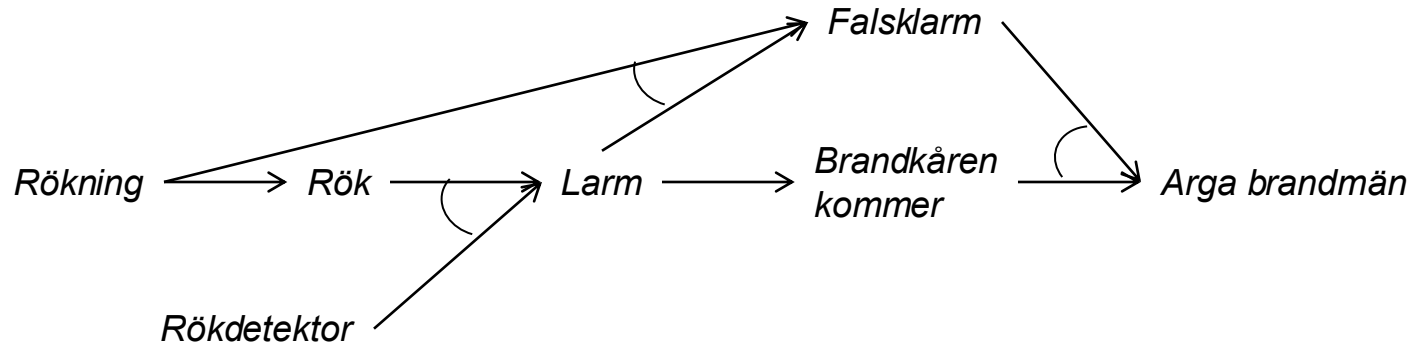
Exempel

1. Rökning $\vee$ Eld $\Rightarrow$ Rök
2. Rök $\wedge$ Rökdetektor $\Rightarrow$ Larm
3. Larm $\Rightarrow$ Brandkåren kommer
4. Rökning $\wedge$ Larm $\Rightarrow$ Falsklarm
5. Brandkåren kommer $\wedge$ Falsklarm $\Rightarrow$ Arga brandmän
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. Arga brandmän?

Framåtinferens

Börja i någon premiss

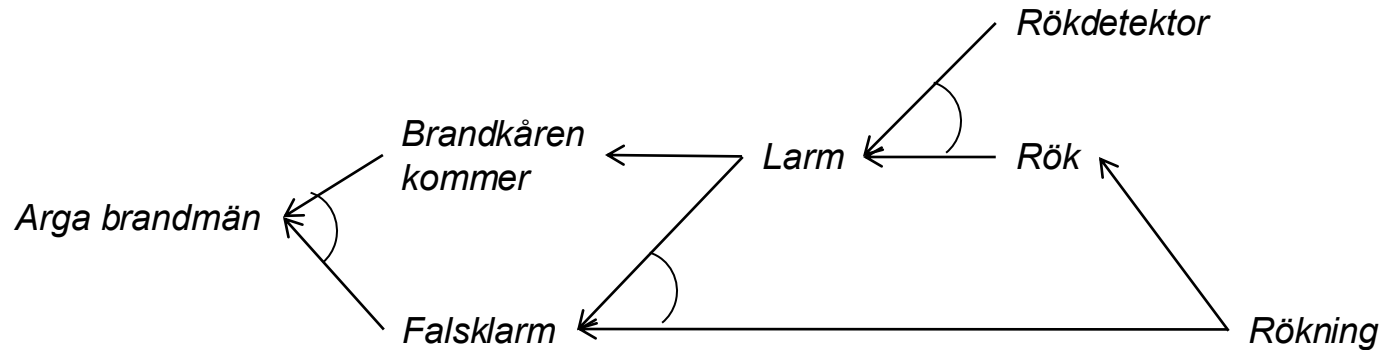
1. Rökning $\vee$ Eld $\Rightarrow$ Rök
2. Rök $\wedge$ Rökdetektor $\Rightarrow$ Larm
3. Larm $\Rightarrow$ Brandkåren kommer
4. Rökning $\wedge$ Larm $\Rightarrow$ Falsklarm
5. Brandkåren kommer $\wedge$ Falsklarm $\Rightarrow$ Arga brandmän
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. Arga brandmän?



Bakåtinferens

Börja i slutsatsen

1. Rökning $\vee$ Eld $\Rightarrow$ Rök
2. Rök $\wedge$ Rökdetektor $\Rightarrow$ Larm
3. Larm $\Rightarrow$ Brandkåren kommer
4. Rökning $\wedge$ Larm $\Rightarrow$ Falsklarm
5. Brandkåren kommer $\wedge$ Falsklarm $\Rightarrow$ Arga brandmän
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. Arga brandmän?



Resolution

- Mekanisk bevismetod som bygger på motsägelse
- Exempel

Rökning $\Rightarrow$ Rök

Rök $\Rightarrow$ Larm

ger Rökning $\Rightarrow$ Larm (dvs. att implikationen är transitiv)

$\neg$ Rökning $\vee$ **Rök**

$\neg$ **Rök** $\vee$ Larm

$\neg$ Rökning $\vee$ Larm ("resolvent")

Resolution

- Antag att $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ är mängder med teorem och att α är ett teorem
- Resolution

$$\frac{\mathcal{A} \cup \alpha \quad \neg\alpha \cup \mathcal{B}}{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$$

- Exempel

$$\frac{A \vee \neg B \quad B \vee C}{A \vee C}$$

Resolution

1. Konvertera alla satser till konjunktiv normalform (KNF)
2. Negera vad som ska som ska visas och lägg till i kunskapsbasen
3. Upprepa tills en kontradiktion hittas eller annat stoppvillkor
 - a. Välj två klausuler som delar en term och dess komplement (ex. A och $\neg A$)
 - b. Resolventen är disjunktionen av alla termer **med lämpliga substitutioner***
 - c. Om resolventen är tomma mängden så returnera kontradiktion, annars lägger vi till resolventen till KB

* Vi återkommer till substitutioner när vi diskuterar predikatlogik. För satslogik behövs inte det steget.

Exempel

1. Rökning $\vee$ Eld $\Rightarrow$ Rök
2. Rök $\wedge$ Rökdetektor $\Rightarrow$ Larm
3. Larm $\Rightarrow$ Brandkåren kommer
4. Rökning $\wedge$ Larm $\Rightarrow$ Falsklarm
5. Brandkåren kommer $\wedge$ Falsklarm $\Rightarrow$ Arga brandmän
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. Arga brandmän?

Gör om till konjunktiv normalform, 1

1. $\neg(\text{Rökning} \vee \text{Eld}) \vee \text{Rök}$
2. $\neg(\text{Rök} \wedge \text{Rökdetektor}) \vee \text{Larm}$
3. $\neg\text{Larm} \vee \text{Brandkåren kommer}$
4. $\neg(\text{Rökning} \wedge \text{Larm}) \vee \text{Falsklarm}$
5. $\neg(\text{Brandkåren kommer} \wedge \text{Falsklarm}) \vee \text{Arga brandmän}$
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. **$\neg\text{Arga brandmän}$**

Negera det vi vill härleda!

Gör om till konjunktiv normalform, 2

1. $\neg(\text{Rökning} \vee \text{Eld}) \vee \text{Rök} \Leftrightarrow (\neg\text{Rökning} \wedge \neg\text{Eld}) \vee \text{Rök} \Leftrightarrow (\neg\text{Rökning} \vee \text{Rök}) \wedge (\neg\text{Eld} \vee \text{Rök})$
 - A. $\neg\text{Rökning} \vee \text{Rök}$
 - B. $\neg\text{Eld} \vee \text{Rök}$
2. $\neg(\text{Rök} \wedge \text{Rökdetektor}) \vee \text{Larm} \Leftrightarrow (\neg\text{Rök} \vee \neg\text{Rökdetektor}) \vee \text{Larm}$
 $\neg\text{Rök} \vee \neg\text{Rökdetektor} \vee \text{Larm}$
3. $\neg\text{Larm} \vee \text{Brandkåren kommer}$
4. $\neg(\text{Rökning} \wedge \text{Larm}) \vee \text{Falsklarm} \Leftrightarrow (\neg\text{Rökning} \vee \neg\text{Larm}) \vee \text{Falsklarm}$
 $\neg\text{Rökning} \vee \neg\text{Larm} \vee \text{Falsklarm}$
5. $\neg(\text{Brandkåren kommer} \wedge \text{Falsklarm}) \vee \text{Arga brandmän}$
 $\neg\text{Brandkåren kommer} \vee \neg\text{Falsklarm} \vee \text{Arga brandmän}$
6. Rökning
7. Rökdetektor
8. $\neg\text{Arga brandmän}$

Konjunktiv normalform

1a. $\neg \text{Rökning} \vee \text{Rök}$

1b. $\neg \text{Eld} \vee \text{Rök}$

2. $\neg \text{Rök} \vee \neg \text{Rökdetektor} \vee \text{Larm}$

3. $\neg \text{Larm} \vee \text{Brandkåren kommer}$

4. $\neg \text{Rökning} \vee \neg \text{Larm} \vee \text{Falsklarm}$

5. $\neg \text{Brandkåren kommer} \vee \neg \text{Falsklarm} \vee \text{Arga brandmän}$

6. Rökning

7. Rökdetektor

8. $\neg \text{Arga brandmän}$

Härled en motsägelse

Plocka två satser, och lägg till KB, t.ex.

1a+1b ger 9. $\neg$ Rökning $\vee$ $\neg$ Eld $\vee$ Rök

2+7 ger 10. $\neg$ Rök $\vee$ Larm

9+10 ger 11. $\neg$ Rökning $\vee$ $\neg$ Eld $\vee$ Larm

5+8 ger 12. $\neg$ Brandkåren kommer $\vee$ $\neg$ Falsklarm

3+12 ger 13. $\neg$ Larm $\vee$ $\neg$ Falsklarm

13+4 ger 14. $\neg$ Rökning $\vee$ $\neg$ Larm

14+6 ger 15. $\neg$ Larm

2+15 ger 16. $\neg$ Rök $\vee$ $\neg$ Rökdetektor

1a+16 ger 17. $\neg$ Rökning $\vee$ $\neg$ Rökdetektor

17 + 6 ger 18. $\neg$ Rökdetektor

18 + 7 ger en motsägelse

1a. $\neg$ Rökning $\vee$ Rök

1b. $\neg$ Eld $\vee$ Rök

2. $\neg$ Rök $\vee$ $\neg$ Rökdetektor $\vee$ Larm

3. $\neg$ Larm $\vee$ Brandkåren kommer

4. $\neg$ Rökning $\vee$ $\neg$ Larm $\vee$ Falsklarm

5. $\neg$ Brandkåren kommer $\vee$ $\neg$ Falsklarm $\vee$ Arga brandmän

6. Rökning

7. Rökdetektor

8. $\neg$ Arga brandmän

Sammanfattning, 1

- Formler är sanna eller ej givet en viss modell
 - En modell tilldelar värden till våra symboler
- En formel är antingen
 - Sann för alla möjliga tilldelningar, T (tautologi)
 - Falsk för alla möjliga tilldelningar, kontradiktion, $\perp$ (falsum)
 - Kontingent, sann för vissa tilldelningar
- Logiska konsekvenser kan visas med
 - Sanningstabell
 - Motsägelsebevis

Sammanfattning, 2

- Naturlig deduktion
 - Uppsättning regler för att introducera/eliminera nya formler
 - Slutsatsen ska bygga på premisser
- Framåtinferens och bakåtinferens
- Resolution
 - Bygger på motsägelse
 - Visa att negationen till det vi vill visa inte kan vara sant
 - Kräver att vi skriver om våra satser till klausuler i KNF
 - Kombinera klausuler parvis tills dess att motsägelse uppstår