

Bayesianska nätverk

Produktregeln

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

Bayes teorem

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Uppgift 1

Betrakta följande simultanfördelning:

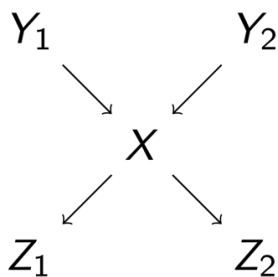
X	Y	P
sommar	varmt	0,4
sommar	kallt	0,2
vinter	varmt	0,1
vinter	kallt	0,3

Beräkna sannolikheterna för följande:

1. $P(\text{sommar} \wedge \text{varmt}) = 0,4$
2. $P(\text{sommar}) = P(\text{sommar} \wedge \text{varmt}) + P(\text{sommar} \wedge \neg \text{varmt}) = 0,4 + 0,2 = 0,6$
3. $P(\text{varmt}) = P(\text{varmt} \wedge \text{sommar}) + P(\text{varmt} \wedge \neg \text{sommar}) = 0,4 + 0,1 = 0,5$
4. $P(\text{varmt} | \text{sommar}) = \frac{P(\text{varmt} \wedge \text{sommar})}{P(\text{sommar})} = \frac{0,4}{0,6} = 0,67$

Uppgift 2

Här är ett Bayesianskt nätverk:



1. Är Z_1 och Z_2 villkorligt oberoende givet X ? Ja. Eftersom $P(Z_1|X, Z_2) = P(Z_1|X)$.
2. Faktorisera följande genom att utnyttja villkorliga oberoenden:
 $P(X, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) = P(Z_1|X)P(Z_2|X)P(X|Y_1, Y_2)P(Y_1)P(Y_2)$
3. Om varje stokastisk variabel är binär, hur många värden har simultanfördelningen? 5 variabler med 2 möjliga värden vardera: $2^5 = 32$
4. Beskrivet med sannolikhetstabeller för varje nod, hur många värden behövs i nätet?

Y_1 : 1, Y_2 : 1, X : 4, Z_1 : 2, Z_2 : 2

Totalt: 10 värden

Uppgift 3

Planeten Zebulon befolkas av abianer och bebianer. 40% av befolkningen är abianer, och 10% av dessa har lila öron. Andelen bebianer med lila öron är endast 8%. En av planetens invånare blir slumpmässigt utvald.

1. Hur stor är apriorisannolikheten för att den utvalda individen är bebian?
2. Hur stor är sannolikheten att den utvalda individen har lila öron?
3. Antag att du får informationen att den utvalda individen har lila öron. Hur stor är aposteriosannolikheten för att den utvalda individen är abian?

apriori = innan erfarenhet
aposteriori = efter erfarenhet

A: Abian

L: Lila öron

$$P(a) = 0,4$$

$$P(\neg a) = 1 - P(a) = 0,6$$

$$P(l|a) = 0,1$$

$$P(\neg l|a) = 1 - P(l|a) = 0,9$$

$$P(l|\neg a) = 0,08$$

$$P(\neg l|\neg a) = 1 - P(l|\neg a) = 0,92$$

1. $P(\neg a) = 0,6$
2. $P(l) = P(l|A) = P(l|a)P(a) + P(l|\neg a)P(\neg a) = 0,1 * 0,4 + 0,08 * 0,6 = 0,088$
3. $P(a|l)$ men vi har inte tillgång till värdet ovan: Bayes!
4. **Alternativ 1:**

$$P(a|l) = \frac{P(l|a)P(a)}{P(l)} = \frac{0,1 * 0,4}{0,088} = 0,455$$

Alternativ 2 (normaliserat):

Om vi gör det normaliserat behöver vi inte beräkna nämnaren $P(l)$:

$$P(a|l) = \alpha P(l|a)P(a) = \alpha * 0,1 * 0,4 = \alpha * 0,04$$

$$P(\neg a|l) = \alpha P(l|\neg a)P(\neg a) = \alpha * 0,08 * 0,6 = \alpha * 0,048$$

$\alpha * (0,04 + 0,048) = 1$ utfallen för A måste summera till 1
dvs. för att det ska stämma måste $\alpha = 1/(0,04 + 0,048)$

$$P(a|l) = \alpha * 0,04 = \frac{0,04}{0,04+0,048} = 0,455$$

Uppgift 4

Anta att det i november regnar 90% av alla dagar och är soligt resterande dagar. Om det regnar är det 20% sannolikhet att Bob tar cykeln till jobbet men om det är soligt är sannolikheten 60%.

Hur stor är sannolikheten för att det regnar om Bob tar cykeln till jobbet i november?

Cyklar: Bob cyklar

Regn: Regnar i november

$$P(\text{regn}) = 0,9$$

$$P(\neg \text{regn}) = 1 - P(\text{regn}) = 0,1$$

$$P(\text{cyklar}|\text{regn}) = 0,2$$

$$P(\text{cykel}|\neg \text{regn}) = 0,6$$

Alternativ 1:

$$P(\text{regn}|\text{cyklar}) = \frac{P(\text{cyklar}|\text{regn})P(\text{regn})}{P(\text{cyklar})} = \frac{P(\text{cyklar}|\text{regn})P(\text{regn})}{P(\text{cyklar}|\text{regn})P(\text{regn}) + P(\text{cyklar}|\neg \text{regn})P(\neg \text{regn})} = \frac{0,2 * 0,9}{0,2 * 0,9 + 0,6 * 0,1} = 0,75$$

Alternativ 2 (normaliserat):

$$P(\text{regn}|\text{cyklar}) = \alpha P(\text{cyklar}|\text{regn})P(\text{regn}) = \alpha * 0,2 * 0,9 = \alpha * 0,18$$

$$P(\neg \text{regn}|\text{cyklar}) = \alpha P(\text{cyklar}|\neg \text{regn})P(\neg \text{regn}) = \alpha * 0,6 * 0,1 = \alpha * 0,06$$

$$\alpha = 1/(0,18 + 0,06) \quad \text{eftersom } \alpha(0,18 + 0,06) \text{ ska summera till } 1$$

$$P(\text{regn}|\text{cyklar}) = \alpha * 0,18 = 0,75$$

$$P(\neg \text{regn}|\text{cyklar}) = \alpha * 0,06 = 0,25$$

Svar: Det är 75% att det regnar.

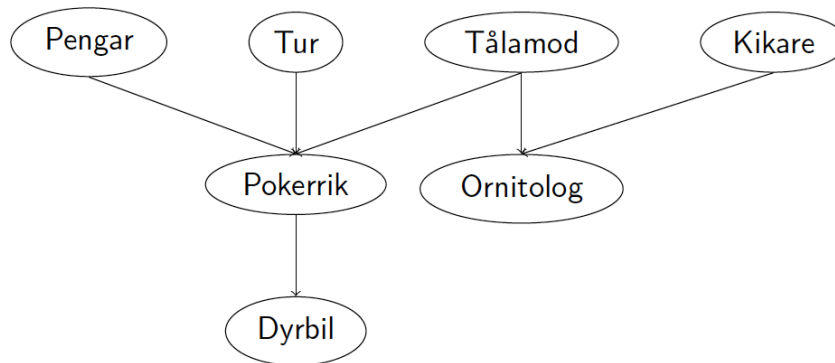
Uppgift 5

Konstruera ett Bayesianskt nätverk, med övergångssannolikhetstabeller (hitta på egna sannolikheter) för följande meningar:

För att bli rik på poker krävs tur, tålamod och pengar.

Den som blir rik på poker köper ofta en dyr bil.

Många med tålamod och kikare är fågelskådare.



$P(\text{pengar})$	$P(\text{tur})$	$P(\text{tålamod})$	$P(\text{kikare})$
0,1	0,05	0,4	0,2

Pengar	Tur	Tålamod	$P(\text{pokerrik} \text{Pengar, Tur, Tålamod})$
T	T	T	0,9
T	T	F	0,7
T	F	T	0,3
T	F	F	0,2
F	T	T	0,7
F	T	F	0,2
F	F	T	0,1
F	F	F	0,01

Tålamod	Kikare	$P(\text{ornitolog} \text{Tålamod, Kikare})$
T	T	0,6
T	F	0,2
F	T	0,2
F	F	0,01

Pokerrik	$P(\text{dyrbil} \text{Pokerrik})$
T	0,6
F	0,1

Uppgift 6

Ett test som ska visa om man har en viss allergi har en säkerhet på 99%:

Om man har allergi kommer man testas positivt i 99% av fallen.

Om man inte har allergin kommer man testas negativt i 99% av fallen.

1. Bob testar sig och testet visar positivt. Hur stor är sannolikheten att Bob är allergisk? Kan vi veta det?
2. Anta att prevalensen är 1%, dvs. att 1% av befolkningen har allergin. Låt A beteckna händelsen "har allergin" och låt T beteckna händelsen "testas positivt". Översätt uppgiften till sannolikheter för dessa två händelser.
3. Vad är sannolikheten för att en slumpmässigt utvald person testas positivt? Svara genom att ange ett procenttal. Visa hur du räknat.
4. Gå tillbaka till uppgift 1 och beräkna hur sannolikt det är att Bob faktiskt har allergin. Svara genom att ange ett procenttal. Visa hur du räknat.

1) Nej, eftersom vi inte vet något om prevalensen.

2)

$$P(a) = 0,01$$

$$P(\neg a) = 0,99$$

$$P(t|a) = 0,99$$

$$P(\neg t|a) = 0,01$$

$$P(t|\neg a) = 0,01$$

$$P(\neg t|\neg a) = 0,99$$

3)

$$P(t) = P(t|A) = P(t|a) * P(a) + P(t|\neg a) * P(\neg a) = 0,99 * 0,01 + 0,01 * 0,99 = 0,0198 \text{ (ca 2\%)}$$

4)

Alternativ 1:

$$P(a|t) = \frac{P(t|a)P(a)}{P(t)} = \frac{0,99 * 0,01}{0,0198} = 0,5 = \mathbf{50\%}$$

Alternativ 2 (normaliserad):

$$P(a|t) = \alpha P(t|a)P(a) = \alpha * 0,99 * 0,01 = 0,0099\alpha = 0,5 = \mathbf{50\%}$$

$$P(\neg a|t) = \alpha P(t|\neg a)P(\neg a) = \alpha * 0,01 * 0,99 = 0,0099\alpha = 0,5 = 50\%$$

$$\alpha = 1/(0,0099 + 0,0099) = 0,0198$$