

729G78 Artificiell intelligens

Probabilistisk logik

Robin Keskisärkkä

HCS/IDA



LINKÖPINGS
UNIVERSITET

Probabilistiska resonemang

- Osäkerhet
- Grundläggande sannolikhetslära
 - Stokastiska variabler
 - Bayes teorem
- Bayesianska nätverk
 - Konstruktion
 - Inferens
- HMM

Osäkerhet

- Full observerbarhet och förutsägbarhet är nästan aldrig möjlig
 - Ofullständig eller felaktig förståelse av världen, jfr qualification problem
- Exempel:
 - Mål: Cykla hem direkt efter jobbet
 - Undantag: Måste jobba, blir bortbjuden, cykeln har blivit stulen, cykeln har punktering, huset har brunnit ner etc.
- Möjliga lösningar
 - Ändra målet: Komma hem någon gång
 - Ändra resurserna: Agera innan cykeln blir stulen eller får punktering
- Vad är rationella beslut under sådana omständigheter?
 - Hur viktigt är det att uppnå målet jämfört med den kostnad det innebär och med hänsyn till hur troligt det är att målet uppnås

Osäkerhet, exempel

- Mål: Äga en ny bil
- Möjliga lösningar
 - Spara i 10 år
 - Ta ett lån
 - Spela bingolotto
- Vad är rationellt?
 - Hur stort värde anses en ny bil ha *nu* respektive om 10 år?
 - Vad är kostnaden för att ta ett lån?
 - Hur stor sannolikhet är det att vinna en bil på bingolotto?
 - Hur mycket kostar en bingolott?

Osäkerhet

Diagnosregel

$\forall d \text{ Lufttomt}(d) \Rightarrow \text{Punktering}(d)$

Inte korrekt eftersom alla lufttomma däck inte punkterade

$\forall d \text{ Lufttomt}(d) \Rightarrow \text{Punktering}(d) \vee \text{IngenVentil}(d) \vee \text{IngenSlang}(d) \vee \text{IntePumpat}(d) \vee \dots$ (qualification problemet)

Funkar inte med

$\forall d \text{ Punktering}(d) \Rightarrow \text{Lufttomt}(d)$ eftersom det kan vara pyspunka, nypunkat etc.

Hur kvantifierar vi osäkerhet?

Sannolikhet

Något i stil med

$$\forall d \text{ Lufttomt}(d) \xRightarrow{0,8} \text{Punktering}(d)$$

Sannolikheten för punktering givet att däck är lufttomt är 0,8

Detta betyder att 80% av alla lufttomma däck har punktering inte att vi har 80% punktering, dvs satser är sanna eller falska med viss sannolikhet

Varifrån kommer sannolikheterna?

- Frekventistiskt perspektiv
 - Sannolikheter är relativa frekvenser som baseras på experiment och observationer
- Subjektivistiskt perspektiv
 - Sannolikheter beskriver en agents konfidens
- Objektivistiskt perspektiv
 - Sannolikheterna är reella aspekter i verkligheten eller objektiva sanningar, ex. sannolikheten nät man singlar slant

Beslutsteoretisk agent

- Räkna ut sannolikheter för nuvarande tillstånd baserat på percept och handlingar
- Räkna ut utfallssannolikheter för handlingar baserat på handlingsbeskrivningar och nuvarande tillstånd
- Välj den handling som har högst förväntad nytta givet sannolikheten att lyckas och information om handlingars nyttighet

En beslutsteoretisk agent antas inte med säkerhet kunna välja en handling, utföra den och sen vara säker på utfallet

Stokastiska variabler (random variables)

- En stokastisk variabel har sannolikheter för värden ur en värdedomän, exempel:
 - X representerar ett tärningskast med värdemängden $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$, där sannolikheten för varje utfall är $\frac{1}{6}$
 - Punktering är antingen $\langle \text{sant}, \text{falskt} \rangle$ med för sannolikheterna 0,2 respektive 0,8
- $P(\text{Punktering}=\text{sant})$ betecknar sannolikheten att den stokastiska variabeln Punktering har värdet sant
- Kan kombineras med logiska konnektiv
 - $P(\text{Punktering}=\text{sant} \wedge \text{Cykelpump}=\text{falskt}) = 0,99$

Konventioner

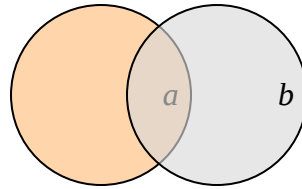
- $P(\text{sant}) = 1$ och $P(\text{falskt}) = 0$
- $P(X=\text{sant})$ skrivs $P(x)$ och $P(X=\text{falskt})$ skrivs $P(\neg x)$
 - $P(\text{Punktering}=\text{sant})$ skrivs som $P(\text{punktering})$
 - $P(\text{cykelpump} \wedge \neg \text{punktering}) = 0,1$
- Kommatecken används ibland som alternativ till $\wedge$ (och)
 - $P(\text{cykelpump}, \neg \text{punktering}) = 0,1$

Sannolikhetsfördelning

- En stokastisk variabels värdeomän kan även ha flera värden
 - $P(\text{Däck=punkterat}) = 0,2$
 - $P(\text{Däck=opumpat}) = 0,3$
 - $P(\text{Däck=helt}) = 0,5$
- **P** (fetstil) betecknar en vektor av sannolikheter
 - Ex. $\mathbf{P}(\text{Däck}) = \langle 0,2, 0,3, 0,5 \rangle$
 - $\mathbf{P}(\text{Cykelpump, Punktering})$ betecknar *alla* kombinationer av värden
 - T.ex. $\mathbf{P}(\text{cykelpump, Punktering})$ betecknar de fall då Cykelpump=sant medan Punktering är antingen sant eller falskt

Grundläggande axiom (Kolmogorows axiom)

- $0 \leq P(a) \leq 1$  Sannolikheten för ett visst utfall är alltid mellan 0 och 1
- För variabeln D med domänen $d_1, \dots, d_n$ gäller: $\sum_{i=1}^n P(D = d_i) = 1$ 
- $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$



Summan av sannolikheterna för alla möjliga utfall av en variabel är alltid 1

$P(a) + P(b)$ räknar med överlappet två gånger

Betingad sannolikhet (villkorad sannolikhet)

Ett nytt självtest för smittkoppor har visat sig ha mycket hög sensitivitet och specificitet ($P(\text{test}|\text{smittad}) = 0,99$ och $P(\neg\text{test}|\neg\text{smittad}) = 0,99$)

Bob testar sig och testet visar positivt:

Hur stor sannolikhet är det att Bob har smittkoppor?

Ex. senaste dokumenterade fallet av smittkoppor var 1977

Vad var sannolikheten att Bob var smittad innan han testade sig?

Ny evidens uppdaterar redan
existerande sannolikheter.

Betingad sannolikhet

Sannolikheten att a är sann givet att b är sann tecknas $P(a|b)$

$P(\text{punktering} | \neg \text{luft}) = 0,8$, förutsatt att vi bara vet lufttomt

$P(\text{punktering} | \neg \text{luft} \wedge \text{cykelpump}) = 0,91$, om vi vet att vi försökt pumpa upp däcket

Betingad sannolikhet kan definieras i termer av ovillkorlig sannolikhet

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

Produktregeln

$$P(a \wedge B) = P(a|b)P(b)$$

$$P(a \wedge B) = P(b|a)P(a)$$

Kedjeregeln

$$\begin{aligned} P(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) &= \\ P(a_n | a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) \cdot P(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) &= \\ P(a_n | a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) \cdot P(a_{n-1} | a_{n-2}, \dots, a_1) \dots P(a_2 | a_1) \cdot P(a_1) \end{aligned}$$

Kedjeregeln

$$\begin{aligned} P(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) &= \\ P(a_n | a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) \cdot P(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) &= \\ P(a_n | a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) \cdot P(a_{n-1} | a_{n-2}, \dots, a_1) \dots P(a_2 | a_1) \cdot P(a_1) \end{aligned}$$

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n P(a_i \mid a_1, a_2, \dots, a_{i-1})$$

Simultanfördelning, 1

- Simultanfördelningen visar sannolikheten för varje möjlig kombination av värden på stokastiska variabler (jmf med sanningstabell)
- $P(Punktering)$ betecknar såväl $P(punktering)$ som $P(\neg punktering)$, ex. $P(Punktering) = \langle 0,6, 0,4 \rangle$

	$P(Punktering)$
$Punktering=sant$	0,6
$Punktering=falskt$	0,4

- För två variabler med värdeomän sant/falskt blir det $2 \times 2 = 4$ värden

Simultanfördelning, 2

	$P(\text{Punktering}, \text{Luft})$	
	<i>luft</i>	$\neg \text{luft}$
<i>punktering</i>	0,1	0,4
$\neg \text{punktering}$	0,4	0,1

- Tabellens värden ska summera till 1
- Ur tabellen fås t.ex.:

$$P(\text{punktering} \wedge \neg \text{luft}) = 0,4$$

$$P(\text{Punktering} \wedge \text{luft}) = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

$$P(\text{punktering} | \neg \text{luft}) = \frac{P(\text{punktering} \wedge \neg \text{luft})}{P(\neg \text{luft})} = \frac{0,4}{0,4 + 0,1} = 0,8$$

Simultanfördelning, 3

- Fler variabler

$\mathbf{P}(\text{Punktering}, \text{Luft}, \text{Cykelpump})$ ger tabell med $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ värden

För n binära stokastiska variabler har vi 2^n värden

	$\mathbf{P}(\text{Punktering}, \text{Luft}, \text{Cykelpump})$			
	<i>cykelpump</i>		$\neg$ <i>cykelpump</i>	
	<i>luft</i>	$\neg$ <i>luft</i>	<i>luft</i>	$\neg$ <i>luft</i>
<i>punktering</i>	...	...	...	...
$\neg$ <i>punktering</i>	...	...	...	...

Oberoende variabler

- För oberoende variabler blir det färre värden i simultanfördelningen
 - Ex. tärningsslag så gäller $P(\text{Tärning}_2=6 \mid \text{Tärning}_1=1) = P(\text{Tärning}_2=6)$, dvs utfallet för Tärning_2 är oberoende av utfallet för Tärning_1
 - Om slagen var beroende skulle vi ha $6^2 = 36$ värden men nu har vi endast $6 + 6$ utfall
- $P(\text{Punktering}, \text{Sol})$ är oberoende och kan skrivas som $P(\text{Punktering}) \cdot P(\text{Sol})$, dvs. med endast $2 + 2$ värden
- $P(\text{Punktering}, \text{Sol}, \text{Tandvärk}, \text{Tärning}_1, \text{Tärning}_2)$ är också oberoende, vilket ger $2 + 2 + 2 + 6 + 6 = 18$ värden istället för $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 288$

Bayes teorem, 1

$$P(a \cup b) = P(a | b)P(b)$$

Produktregeln

$$P(a \cup b) = P(b | a)P(a)$$

$$P(a | b)P(b) = P(b | a)P(a)$$

$$P(a | b) = \frac{P(b | a)P(a)}{P(b)}$$

Bayes teorem

$$\mathbf{P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}}$$

Bayes teorem för flervärda variabler

Bayes teorem, 2

- Kausalsamband är i stil med ”händelse orsakar observation”, men vi vill ofta diagnostisera utifrån observationer
- Bayes teorem låter oss uttrycka diagnossamband i termer av kausalsamband

$$P(\text{orsak}|\text{effekt}) = \frac{P(\text{effekt}|\text{orsak})P(\text{orsak})}{P(\text{effekt})}$$

- Exempel

$$P(\text{rödaPrickar} | \text{mässling}) = 0,8$$

kausalsamband, röda prickar givet mässling

$$P(\text{mässling}) = 0,3$$

ovillkorligt

$$P(\text{rödaPrickar}) = 0,5$$

ovillkorligt

Diagnostisera mässling utifrån observation av röda prickar:

$$P(\text{mässling}|\text{rödaPrickar}) = \frac{P(\text{rödaPrickar}|\text{mässling})P(\text{mässling})}{P(\text{rödaPrickar})} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,5} = 0,48$$

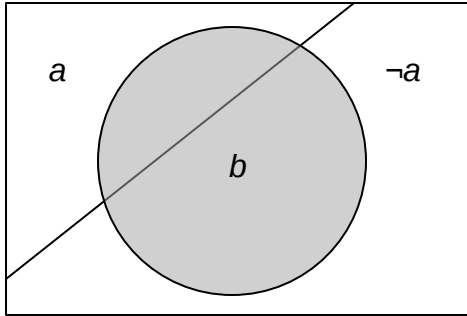
Mer Bayes

$$P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$$

Sannolikheten för b om inga observationer gjorts?

- Eftersom vi har disjunkta händelser som fyller hela utfallsrummet kan $P(b)$ tecknas som:

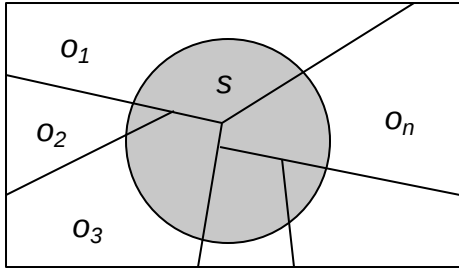
$$P(b) = P(b|a)P(a) + P(b|\neg a)P(\neg a)$$



$$P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b|a)P(a) + P(b|\neg a)P(\neg a)}$$

Mer generell Bayes

- Om vi har flera möjliga orsaker till en viss observation



$$P(s) = \sum_{i=1}^n P(o_i)P(s|o_i)$$

$$P(o_k | s) = \frac{P(s|o_k)P(o_k)}{\sum_{i=1}^n P(o_i)P(s|o_i)}$$

Exempel, Kahneman & Tversky (1972)

- Stad med två taxibolag
 - 85% är blåa, 15% är gröna
- Taxi inblandad i smitningsolycka och vittne säger att taxin var grön
- Tester visar att vittnet blandar ihop grönt och blått i 20% av fallen
- Hur sannolikt att taxin var grön?
 - Sannolikheten innan vittnet kom in i bilden?
 - Sannolikheten efteråt?

Exempel, Kahneman & Tversky (1972)

$$P(\text{grön}) = 0,15$$

$$P(\text{blå}) = 0,85$$

$$P(\text{vittnarGrön}|\text{grön}) = 0,8$$

$$P(\text{vittnarGrön}|\text{blå}) = 0,2$$

$$P(\text{vittnarGrön}) = P(\text{vittnarGrön}|\text{grön})P(\text{grön}) + P(\text{vittnarGrön}|\text{blå})P(\text{blå})$$

$$P(\text{grön}|\text{vittnarGrön}) = \frac{P(\text{vittnarGrön}|\text{grön})P(\text{grön})}{P(\text{vittnarGrön})} = \frac{0,8 \cdot 0,15}{0,8 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,85} \approx 0,41$$

Normalisering, 1

$$P(\textit{grön} \mid \textit{vittnarGrön}) = \frac{P(\textit{vittnarGrön} \mid \textit{grön})P(\textit{grön})}{P(\textit{vittnarGrön})}$$

$$P(\textit{blå} \mid \textit{vittnarGrön}) = \frac{P(\textit{vittnarGrön} \mid \textit{blå})P(\textit{blå})}{P(\textit{vittnarGrön})}$$

Normalisering, 1

$$P(\text{grön} | \text{vittnarGrön}) = \frac{P(\text{vittnarGrön} | \text{grön})P(\text{grön})}{P(\text{vittnarGrön})}$$

$$P(\text{blå} | \text{vittnarGrön}) = \frac{P(\text{vittnarGrön} | \text{blå})P(\text{blå})}{P(\text{vittnarGrön})}$$

- I båda fallen har vi $P(\text{vittnarGrön})$ i nämnaren och egentligen är vi kanske mest intresserade av vilken av dessa som är mest sannolik
- Vi normaliserar och inför: $a = \frac{1}{P(\text{vittnarGrön})}$

$$P(\text{grön} | \text{vittnarGrön}) = \alpha P(\text{vittnarGrön} | \text{grön})P(\text{grön}) = \alpha \cdot 0,8 \cdot 0,15 = \alpha \cdot 0,12$$

$$P(\text{blå} | \text{vittnarGrön}) = \alpha P(\text{vittnarGrön} | \text{blå})P(\text{blå}) = \alpha \cdot 0,2 \cdot 0,85 = \alpha \cdot 0,17$$

Normalisering, 2

Exempel: Är en individ med röda prickar marsian eller inte?

$$P(\text{marsian}) = 0,2$$

$$P(\neg \text{marsian}) = 1 - P(\text{marsian}) = 0,8$$

$$P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian}) = 0,96$$

$$P(\text{röda Prickar} \mid \neg \text{marsian}) = 0,26$$

OBS! $P(\text{röda Prickar} \mid \neg \text{marsian}) \neq 1 - P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian})$

Till skillnad från $P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian}) = 1 - P(\neg \text{röda Prickar} \mid \text{marsian})$

$$P(\text{marsian} \mid \text{röda Prickar}) = \frac{P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian}) \cdot P(\text{marsian})}{P(\text{röda Prickar})}$$

$$P(\neg \text{marsian} \mid \text{röda Prickar}) = \frac{P(\text{röda Prickar} \mid \neg \text{marsian}) \cdot P(\neg \text{marsian})}{P(\text{röda Prickar})}$$

$$\text{Normalisera och inför } \alpha = \frac{1}{P(\text{röda Prickar})}$$

$$P(\text{marsian} \mid \text{röda Prickar}) = \alpha \cdot P(\text{röda Prickar} \mid \text{marsian}) \cdot P(\text{marsian}) = 0,96 \cdot 0,2 \cdot \alpha = 0,19 \cdot \alpha$$

$$P(\neg \text{marsian} \mid \text{röda Prickar}) = \alpha \cdot P(\text{röda Prickar} \mid \neg \text{marsian}) \cdot P(\neg \text{marsian}) = 0,26 \cdot 0,8 \cdot \alpha = 0,21 \cdot \alpha$$

Normaliserad Bayes

- $\mathbf{P}(Y|X) = \alpha \mathbf{P}(X|Y) \mathbf{P}(Y)$
där α är en normaliseringskonstant som ser till att $\mathbf{P}(Y|X)$ summeras till 1
- $\mathbf{P}(X|Y)$ är kausalsamband, ex *mässling ger röda prickar*
- Vi har också

$$P(a | b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} = \alpha \cdot P(a \wedge b)$$

Jämför med Bayes

$$P(a | b) = \frac{P(b | a) P(a)}{P(b)} = \alpha \cdot P(b | a) \cdot P(a)$$

Exempel, taligenkänning

Man vill välja det mest sannolika ord som en viss ljudsignal svarar mot

$$\mathbf{P(Ord | Signal)} = \frac{\mathbf{P(Signal | Ord)P(Ord)}}{\mathbf{P(Signal)}} = \alpha \cdot \mathbf{P(Signal | Ord) \cdot P(Ord)}$$

$\mathbf{P(Ord)}$ anger hur vanligt ett visst ord är (i en viss kontext)

$\mathbf{P(Signal | Ord)}$ är den akustiska modellen och anger vilken ljudsignal ett ord oftast ger upphov till

Ex: $\mathbf{P("räv" | rä v)} = 0,7$

$\mathbf{P("oäv" | rä v)} = 0,1$

$\mathbf{P("rev" | rä v)} = 0,2$

Villkorligt oberoende, 1

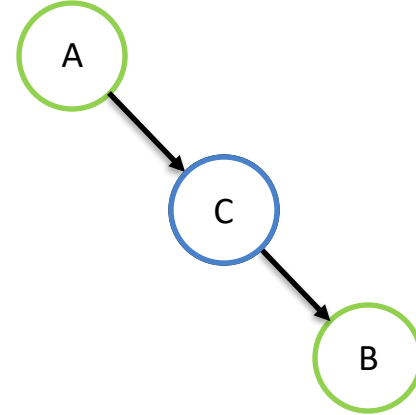
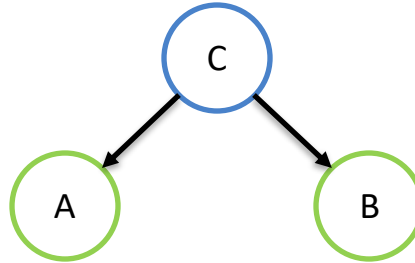
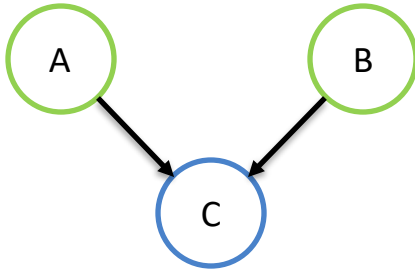
$$P(\text{mässling} \mid \text{rödaPrickar} \wedge \text{feber}) = \alpha \cdot P(\text{rödaPrickar} \wedge \text{feber} \mid \text{mässling}) \cdot P(\text{mässling})$$

- Skalar inte upp eftersom vi har kombinationer av värden, generellt $\mathbf{P}(X_1, X_2, \dots, X_n \mid Y)$ ger 2^n värden
- Men både röda prickar och feber beror på mässling så vi kan anta att röda prickar (feber) inte påverkas av om man har feber (röda prickar) eller inte, givet att vi vet mässling. De är villkorligt oberoende

$$P(\text{mässling} \mid \text{rödaPrickar} \wedge \text{feber}) = \alpha \cdot P(\text{rödaPrickar} \mid \text{mässling}) \cdot P(\text{feber} \mid \text{mässling}) \cdot P(\text{mässling})$$

Villkorligt oberoende, 2

- Två variabler är villkorligt oberoende om observationerna inte påverkar varandra
- Villkorligt oberoende *kan* påverkas av observationer av andra variabler
- Ex. Är A och B nedan villkorligt oberoende givet/inte givet C?



Villkorligt oberoende, 3

- Generellt:

- Om variablerna X och Y är villkorligt oberoende givet variabeln Z så gäller att:

$$\mathbf{P}(X, Y \mid Z) = \mathbf{P}(X \mid Z) \mathbf{P}(Y \mid Z)$$

- Vi har också varianterna:

$$\mathbf{P}(X \mid Y, Z) = \mathbf{P}(X \mid Z) \text{ och } \mathbf{P}(Y \mid X, Z) = \mathbf{P}(Y \mid Z)$$

om X och Y villkorligt oberoende givet Z

$$\mathbf{P}(\textit{Feber} \mid \textit{Mässling} \wedge \textit{RödaPrickar}) = \mathbf{P}(\textit{Feber} \mid \textit{Mässling})$$

dvs. sannolikheten för feber givet att man har mässling påverkas inte av om man har röda prickar eller ej

Naive Bayes

- Om en orsak kan ge upphov till flera olika effekter så kan man förenkla simultanfördelningen

$$\mathbf{P}(Mässling, RödaPrickar, Feber) = \text{produktregeln} = \mathbf{P}(Mässling)\mathbf{P}(RödaPrickar, Feber | Mässling)$$

Villkorligt oberoende ger:

$$\mathbf{P}(Mässling, RödaPrickar, Feber) = \mathbf{P}(Mässling)\mathbf{P}(Feber | Mässling)\mathbf{P}(RödaPrickar | Mässling)$$

Mer generellt

$$\mathbf{P}(Orsak, Effekt_1, Effekt_2, \dots, Effekt_n) = \mathbf{P}(Orsak) \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(Effekt_i | Orsak)$$

- Kallas Naive Bayes eftersom den också ibland används när effekterna inte är villkorligt oberoende