

## 4 Grafer

En *graf* är en struktur av prickar förbundna med streck. Ett tidsenligt exempel på en sådan struktur är ett social nätverk, där prickarna motsvarar personer och en streck mellan två prickar uttrycker att motsvarande personer är ”vän” med varandra. Ett annat exempel är ett vägnät, där strecken motsvarar vägar och prickarna motsvarar orter eller korsningar mellan vägar. Mera allmänt så kan man använda grafer för att modellera hur personer eller objekt (prickarna) hänger ihop med varandra (strecken).

### 4.1 Oriktade grafer

När man säger att ”en graf är en struktur av prickar förbundna med streck” så är detta ganska oprecist och informellt. I matematikens värld kallas prickarna för *noder* (på engelska: *vertices*) och strecken för *bågar* (på engelska: *arcs* eller *edges*). En **graf**  $G$  definieras som ett ordnat par  $(V, E)$  där  $V$  är en mängd av **noder** (godtyckliga objekt) och  $E$  är en mängd av bågar mellan noder i  $V$ . En **båge** mellan noder i  $V$  är en delmängd till  $V$  med exakt 2 element, nämligen de två noder som är förbundna genom bågen.

**Fråga:** Betrakta det vägnät som du får när du ritar en prick för var och en av Sveriges tio största städer och ett streck mellan två prickar om de är förbundna genom en Europaväg. Modellera detta nät som graf, dvs. skriv upp mängden av alla noder och mängden av alla bågar.

Låt os kalla grafen för  $G$ . Vi har  $G = (V, E)$  med

$$V = \{S, G, M, U, V, Ö, L, H, J, N\}$$

$$E = \{\{S, U\}, \{S, V\}, \{V, Ö\}, \{Ö, G\}, \{G, H\}, \{H, M\}, \{S, N\}, \{N, L\}, \{L, J\}, \{J, H\}\}$$

**Fråga:** Förklara varför följande strukturer inte är grafer:

$$A = (\{1\}, \{\{1, 2\}\}) \quad B = (\{1\}, \{\{1, 1\}\}) \quad C = (\{1\}, \{(1, 1)\})$$

I struktur  $A$  är den andra komponenten (mängden  $\{\{1, 2\}\}$ ) inte en mängd av delmängder till den första komponenten (mängden  $\{1\}$ ) och kan därmed inte vara en mängd av bågar mellan objekt i denna mängd.

I struktur  $B$  innehåller den andra komponenten en mängd med kardinalitet 1, medan en båge alltid är en mängd med kardinalitet 2.

I struktur  $C$  är ”bågen”  $(1, 1)$  inte en mängd utan ett ordnat par. (Detta är faktiskt ett exempel på en *riktad* båge, något som vi kommer att komma tillbaka till om en liten stund.)

I de kommande avsnitten kommer vi att lära känna en hel del begrepp som kan användas för att prata om grafer.

#### 4.1.1 Delgrafer

Precis som det finns begreppet ”delmängd” så finns det även begreppet ”delgraf”. En graf  $H$  är en **delgraf** till en graf  $G$  om man kan få  $H$  genom att ta bort noder och/eller bågar från  $G$ .

**Fråga:** Kan du uttrycka detta genom att använda delmängdsbegreppet?

Om vi skriver  $G$  som  $G = (V, E)$  och  $H$  som  $H = (V', E')$  så är  $H$  en delgraf till  $G$  om  $V' \subseteq V$  och  $E' \subseteq E$ .

#### 4.1.2 Grannar och grader

Två noder som är förbundna genom en båge kallas för **grannar**. En nods **grad** är antalet bågar den ingår i, dvs. antalet grannar den har.

**Fråga:** Betrakta vägnätsgraf. Vilken grad har Uppsala? Vilken nod har högst grad? Vad skulle det innebära om någon nod i en vägnätsgraf hade grad 0?

Uppsala har grad 1; dess enda granne är Stockholm. Stockholm har högst grad (3); dess grannar är Uppsala, Västerås och Norrköping. En nod med grad 0 representerar en isolerad stad som inte kan nås från andra städer.

### 4.1.3 Stigar

En **stig** är en "vandring" längs bågarna i en graf som inte besöker samma nod två gånger. Ett exempel på en stig är den kortaste vägen mellan Uppsala och Malmö i vägnätsgraf. Varje stig har två ändar och kan anges genom att skriva ner de noder som besöks i tur och ordning. (Det spelar ingen roll med vilken ända man börjar; i samband med stigar finns det inget "från" eller "till", bara ett "mellan".) En stigs **längd** är antalet bågar den använder. Notera att detta är antalet noder den besöker, minus 1. En stig med längd 0 består alltså av en enda nod.

**Fråga:** Skriv ner stigen som motsvarar den kortaste vägen mellan Uppsala och Malmö i vägnätsgraf. Vilken längd har den?

Den kortaste vägen mellan Uppsala och Malmö är en stig av längd 6: Uppsala, Stockholm, Norrköping, Linköping, Jönköping, Helsingborg, Malmö. (Denna stig motsvarar en bilfärd på 680 km i verkligheten.)

### 4.1.4 Sammanhängande grafer

En graf kallas **sammanhängande** om det finns en stig mellan varje par av noder. Mera formellt kan man kräva: För varje par av noder  $v, w$  måste det finnas en stig mellan  $v$  och  $w$ . Notera att  $v$  och  $w$  skulle kunna vara samma nod; men i detta fall finns det ju alltid en stig (med längd 0) mellan dem.

**Fråga:** Vad betyder "sammanhang" i vägnätsgrafer och i samband med sociala nätverk?

Om en vägnätsgraf är sammanhängande så betyder det att man från varje stad kan komma till varje annan stad genom att använda vägarna. I sociala nätverk betyder sammanhang att alla är vän med varandra, antingen direkt eller via (en eller flera) mellanstationer.

### 4.1.5 Cykler

En **cykel** är sluten stig: Den börjar som en stig, men efter den följer ett sista steg där man går från stigens ena ända tillbaka till den andra. I en cykel finns det alltså (exakt) en nod som besöks två gånger.

**Fråga:** Ange en cykel i vägnätsgraf. Finns det även längre eller kortare cykler än den du angett?

En av de kortaste cyklerna i vägnätsgraf är Uppsala – Stockholm – Uppsala. Det finns längre också, till exempel den stig som motsvarar en resa från Stockholm via Helsingborg och tillbaka till Stockholm.

#### 4.1.6 Grannmatriser

En graf kann beskrivas genom sin grannmatris. Denna matris får man genom att skriva ner en kolumn och en rad för varje nod och sedan fylla i alla fält  $(v, w)$  där  $v$  och  $w$  är grannar med ett och alla andra fält med nollor.

**Fråga:** Rita grannmatrisen för vägnätsgraf! Denna grannmatris, liksom alla grannmatriser, har vissa speciella egenskaper. Vilka då? Förklara varför.

För grannmatrisen, se Tabell 1. I varje grannmatris finns det en diagonal av nollor; denna diagonal motsvarar fälten på formen  $(v, v)$ , dvs. de par av noder där en nod paras ihop med sig själv. Skälet till att det finns denna diagonal är att ingen båge kan vara på formen  $\{v, v\}$  eftersom den då bara skulle ha kardinalitet 1. En annan egenskap hos grannmatriser är att de är *symmetriska*: De ser ut likadana om man "speglar" elementen i noll-diagonalen. Detta på grund av att bågar är mängder där ordningen mellan elementen inte spelar någon roll, så varje gång man fyller i en etta i ett fält  $(v, w)$  fyller man även i en etta i fältet  $(w, v)$ .

## 4.2 Riktade grafer

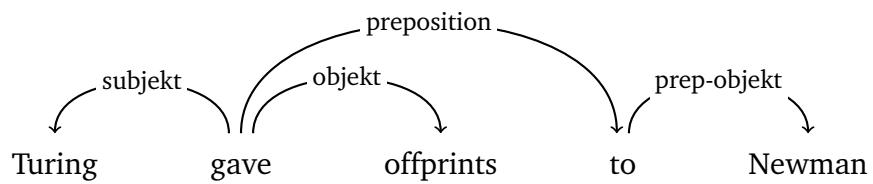
Vi har sett hur nätet av Europavägar mellan Sveriges största städer kan modelleras som graf. Ett problem som dyker upp när man vill överföra detta till vägnätet för en stad som Uppsala är att gator ibland är *enkelriktade*. För att modellera sådana strukturer behöver man ett modifierat grafbegrepp: *riktade grafer*. Dessa spelar en stor roll i språkteknologin.

**Exempel:** Den syntaktiska strukturen hos en mening kan modelleras som en *dependenciesgraf*, där noderna svarar mot meningens ord och bågarna representerar dependenciesrelationer såsom "subjekt till" och "determinator till". Se Figur 1.

Riktade grafer är som vanliga (oriktade) grafer, förutom att bågarna är enkelriktade. Mera formellt kan man definiera så här. Låt  $V$  vara en mängd av noder. En **riktad båge** mellan noder i  $V$  är ett *ordnat par* (ingen mängd!) av noder i  $V$ . En riktad båge  $(v, w)$

	S	G	M	U	V	Ö	L	H	J	N
S	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
G	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
U	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Ö	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
H	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
J	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
N	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Tabell 1: Grannmatrisen för vägnätsgrafan



Figur 1: En dependensgraf.

sägs att gå **från** nod  $v$  **till** nod  $w$ . En **riktad graf** är en struktur  $G = (V, E)$  där  $V$  är en mängd av noder och  $E$  är en mängd av riktade bågar mellan noder i  $E$ .

**Fråga:** En kluring: Hur många olika riktade grafer  $G = (V, E)$  finns det för en given nodmängd  $V$ ?

Det finns lika många grafer som det finns mängder av riktade bågar. Varje bågmängd är en delmängd till mängden  $V \times V$ . Man kan alltså svara på frågan genom att räkna ut hur många olika delmängder till  $V \times V$  det finns. Svaret på den frågan är  $2^{|V|^2}$ . (Kom ihåg hur vi räknade ut kardinaliteten hos en potensmängd!)

Många begrepp som vi lärt känna för oriktade grafer kan överföras till riktade grafer. Ett exempel på detta är begreppet *delgraf*, som definieras på precis samma sätt som förut. Andra begrepp kräver vissa modifikationer. När man t.ex. talar om en **stig** eller en **cykel** i en riktad graf så menar man bara vandringar där man använder bågarna i "rätt riktning". Varje riktad stig har alltså en **startpunkt** och en **slutpunkt**: I en riktad vägnätsgraf beskriver man vägar *från* en stad  $A$  *till* en stad  $B$ , inte vägar *mellan*  $A$  och  $B$ . Ännu andra begrepp kräver lite mera utförliga förklaringar.

#### 4.2.1 Grader

I riktade grafer skiljer man mellan en nods **ingrad** och en nods **utgrad**. En nod  $v$ :s ingrad är antalet bågar som har  $v$  som slutpunkt;  $v$ :s utgrad är antalet bågar som har  $v$  som utgångspunkt.

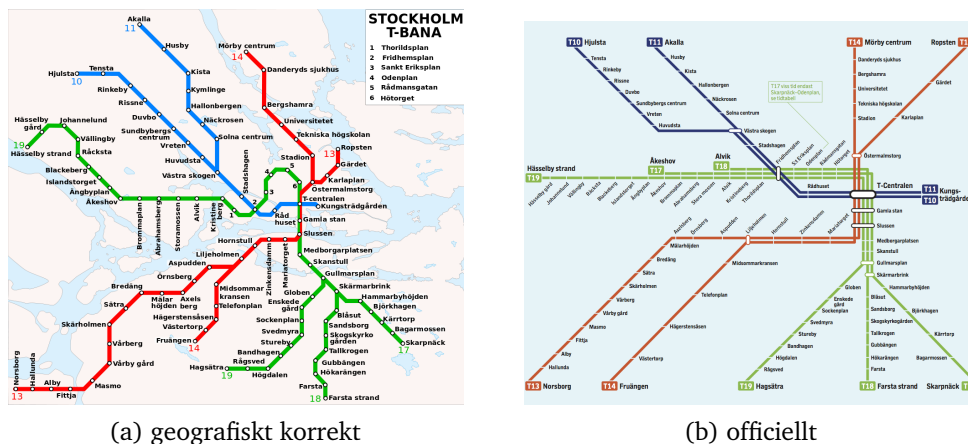
#### 4.2.2 Sammanhang

För riktade grafer skiljer man mellan två olika sammanhangsbegrepp:

- En riktad graf är **starkt sammanhängande** om det för varje par  $(v, w)$  av noder finns en (riktad) stig från  $v$  till  $w$ .
- En riktad graf är **svagt sammanhängande** om den motsvarande oriktade grafen är sammanhängande. Med "motsvarande oriktad graf" menas den oriktade grafen som man får genom att "glömma bort" riktningarna på alla bågar.

### 4.3 Isomorfi

Grafer kan ritas på många olika sätt, och vissa sätt kan vara mera lämpad i ett givet sammanhang än andra. Ett bra exempel på detta är de ritningar man kan hitta när man söker efter kartor över Stockholms tunnelbana, se Figur 2. I båda bilder blir det



Figur 2: Två sätt att rita kartor för Stockholms tunnelbana.

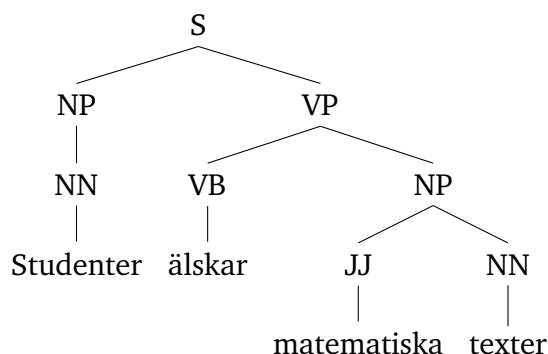
ganska tydligt att tunnelbanenätet kan ses som en graf. Men den ena bilden försöker hålla sig nära till den geografiska verkligheten, medan den andra vill vara översiktlig och t.ex. häva fram på vilka stationer man kan byta tåg. Trots dessa skillnader vill vi kunna säga att båda bilder representerar *samma* graf. Det ska inte spela någon roll hur en graf ritas; det är bara dess struktur som är viktig.

Två grafer som har samma struktur och bara skiljer sig med avseende på hur de ritas, skrivs ner, eller hur noderna är döpta sägs vara **isomorfa**. En färdighet som vi kommer att öva på under kursen är att kunna se exakt när två grafer är isomorfa.

## 5 Träd

En (oriktad) graf som är sammanhängande och inte innehåller några cykler kallas för ett **träd**. Dessa strukturer spelar en stor roll inom språkteknologin.

Den syntaktiska strukturen hos en mening kan beskrivas genom *frasstrukturträd*. Ett exempel visas i Figur 3. I detta träd finns det vissa noder som representerar ord såsom *älskar* och *texter*. Andra noder representerar ordklasser såsom verbal basform (VB) och substantiv (NN). De övriga noderna representerar fraser. I exemplet representerar noden med symbolen S den fullständiga meningen *Studenter älskar matematiska texter*. Denna mening består av två delar, en nominalfras (NP) (som innehåller subjektet *Studenter*) och en verbalfras (VP). Verbalfrasen förgrenar sig ytterligare i ett verb och en nominalfras (som innehåller meningens objekt *matematiska texter*). För att förstå varför en graf som denna kallas för träd bör man hålla bladet uppochnedvänt. Då är S-noden trädets ”rot” och ord-noderna trädets ”löv”.



Figur 3: Ett frasstrukturträd.

## 5.1 Egenskaper

De två karakteristiska egenskaper hos ett träd – att de är sammanhängande och inte innehåller några cykler – hänger ihop på ett särskilt sätt. Detta kan man se när man läser bevisen på de följande två påståendena:

**Lemma 1** *Om man lägger till en båge till ett träd får man en cyklisk graf.* □

PROOF Låt  $T$  vara ett träd. Vad händer om vi lägger till en båge till  $T$ ? Låt oss skriva bågen som  $\{v, w\}$ . Eftersom ett träd är sammanhängande vet vi att det i  $T$  finns en stig som börjar i  $v$  och slutar i  $w$  redan innan vi lägger till den nya bågen. Om vi vandrar längs denna stig och som ett sista steg följer den nya bågen kommer vi tillbaka till  $v$ . Alltså har vi hittat en cykel. ■

**Lemma 2** *Om man tar bort en båge från ett träd får man en osammanhängande graf.*

PROOF Låt  $T$  vara ett träd. Vad händer om vi tar bort en båge  $\{v, w\}$  från  $T$ ? Eftersom ett träd är acykliskt vet vi att bågen  $\{v, w\}$  är den enda stigen mellan  $v$  och  $w$ . (Om det nämligen fanns en till skulle vi tillsammans med bågen  $\{v, w\}$  ha en cykel.) Om vi nu tar bort bågen  $\{v, w\}$  finns det alltså *ingen* stig mellan  $v$  och  $w$  längre; då blir alltså  $T$  osammanhängande. ■

Ett *lemma* är ett matematiskt resultat. Efter att ett lemma har bevisats en gång kan man använda det utan att behöva repetera beviset varje gång. Lemman kan liknas vid de metoder eller funktioner som man hittar i ett programmeringsspråks standardbibliotek.

## 5.2 Spännande träd

Träd är intressanta inte bara i sig, utan även för att analysera andra typer av grafer. I det här avsnittet kommer vi att använda träd för att hjälpa Trafikverket att spara pengar på vägunderhåll. Vi börjar med några definitioner.



Ett **spännande träd** för en graf  $G = (V, E)$  är ett träd  $T = (V, E')$  där  $E' \subseteq E$ . Ett spännande träd för en graf  $G$  har alltså samma noder som  $G$ , men kanske inte alla dess bågar.

**Fråga:** Vilken relevans har spännande träd i samband med vägnätsgrafer?

**Fråga:** Ange en graf för vilken det inte finns något spännande träd.

Ett enkelt exempel är grafen  $G = (\{a, b\}, \{\})$ . Denna graf är osammanhängande, så man kan inte " hitta ett träd i den". (Detta gäller för alla osammanhängande grafer.) Varje sammanhängande graf har minst ett spännande träd. En sammanhängande graf som har exakt ett spännande träd är ett träd.

En **viktad graf** är en graf  $G = (V, E)$  där varje båge  $e \in E$  har tilldelats en vikt  $vikt(e)$ . Vikten av  $G$  är summan över alla vikter av dess bågar. Genom att använda en variant på summanotationen kan vi skriva vikten av  $G$  så här:

$$vikt(G) = \sum_{e \in E} vikt(e)$$

Ett **minimalt spännande träd** för en viktad graf  $G$  är ett spännande träd för  $G$  som har minimal viktsumma bland alla spännande träd för  $G$ .

**Fråga:** Trafikverket måste spara pengar. Deras plan är att stänga av en eller flera Europavägar (fullständigt eller delvist) för att slippa underhålla dem. Regeringen tycker att detta låter som en bra idé; men de kräver att det fortfarande måste gå att resa mellan alla de tio största städerna i landet. Vilken väg eller vilka vägar bör de helst stänga? Modellera med grafer och spännande träd.

Ett sätt att svara på frågan är att räkna ut det minimalt spännande trädet för vägnätsgraf, under förutsättningen att man tilldelar varje båge i den grafen en vikt som motsvarar dess underhållskostnader. Anta att en väg kostar lika mycket underhåll som den är lång. Då borde Trafikverket stänga vägen mellan Örebro och Göteborg. Man kan ju fortfarande resa mellan städerna med omväg via Helsingborg!

### 5.3 Rotade träd och riktade träd

Ett **rotat träd** är ett träd där en nod har valts ut som speciell; detta är trädets **rotnod**. De frässtrukturträd som vi sett i början på detta avsnitt är exempel på rotade träd.

I dessa träd är det S-noden som är rotnoden – den nod som representerar hela meningen.

När man valt ut en rotnod finns det en naturlig hierarkisk struktur i trädet: I spetsen på denna hierarki står roten själv; i nästa led står rotens grannar; i nästa står deras grannar, och så vidare.

**Fråga:** Kan du ge exempel på hierarkiska strukturer som låter sig modelleras med hjälp av rotade träd?

Några exempel är släktträd, filsystem och organisationsstrukturen i ett företag. Även de frässtrukturträd som vi sett i början på detta avsnitt är exempel på rotade träd.

Eftersom släktträd är ett så naturligt exempel på rotade träd brukar man använda släktskapsterminologi för att prata om dem. Man pratar till exempel om en nods **barn** (de underordnade noderna), **fader** eller **moder** (den överordnade noden), **syskon**, **ättlingar**, **förfäder**, och så vidare.

Med tanke på dess hierarkiska struktur är det naturligt att se ett **rotat träd** som ett **riktat träd**: man låter alla bågar peka bort från roten.

## 5.4 Ordnade träd

En ytterligare specialisering på trädbegreppet får man genom att i ett rotat träd lägga en ordning på varje nods barn. På det sättet blir trädet ännu mera likt ett släktträd, eftersom man kan skilja mellan det första barnet, det andra barnet, och så vidare. Strukturen som man får kallas **ordnat träd**. Sådana träd är centrala när man vill representera träd i en dator, och många algoritmer som är relevanta inom datalogin och språkteknologin bygger på den just denna representation. Exempel på detta är *pre-order traversering* och *post-order traversering* av ordnade träd.

**Pre-order traversering** Börja med att besöka roten. Gör sedan en pre-order traversering på alla barn (första barnet först, sista barnet sist).

**Post-order traversering** Börja med att göra en post-order traversering på alla barn (första barnet först, sista barnet sist). Besök sedan roten.

Ett viktigt specialfall är det där man betraktar träd i vilka varje nod har högst två barn. Sådana träd kallas även för **binära träd**. Man brukar kalla det första barnet för det **vänstra barnet** och det andra barnet för det **högra barnet**.