729G46 Informationsteknologi och programmering

Tema 3, Föreläsning 3.3

Johan Falkenjack, johan.falkenjack@liu.se

Föreläsningsöversikt

- Fler sätt att representera grafer
    - grannlista
    - grannmatris
- Matriser, matrismultiplikation
- Räkna ut antalet vägar av en viss längd som finns mellan två noder
- Programmering
    - dela upp i delproblem
    - parprogrammering

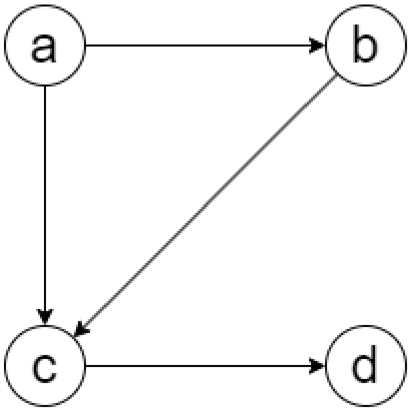
Repetition, graf

- En graf består av hörn och kanter, $G = (V, E)$ där V är mängden hörn/noder och E är mängden kanter/bågar
- I en oriktad graf är varje kant en mängd.
- I riktad graf är varje kant en tupel.
- Exempel
    - Oriktad graf: $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$
    - Riktad graf: $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, b), (b, c), (a, c), (c, d)\}$

Grannlistor

Representation av graf genom att visa vilka grannar varje nod har

Grannlistor



- Ett annat sätt att representera en graf är att använda en *grannlista* (eng. *adjacency list*).
- Hörn och de hörn som de är grannar med
- T.ex. för $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, b), (b, c), (a, c), (c, d)\}$
    - a: b, c
    - b: c
    - c: d
    - d:
- I Python är datatypen `dictionary` ypperlig för att representera grannlistor.

Grannmatriser

Representation av graf som matris

Matriser

- En *matris* är en matematisk konstruktion som har rader och kolumner och på vilken vi antar att vi kan utföra vissa matematiska operationer.
- Inom *linjär algebra* (den gren av matematik där matriser oftast introduceras först) används traditionellt versaler för att referera till matriser, t.ex. matrisen $\boldsymbol{X}$ nedan, medan gemener används för att referera till dess element.
- Element $x_{3,4}$ är alltså värdet på rad 3, kolumn 4, etc.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{bmatrix}$$

Matriser, fortsättning

- Ibland ser man matriser skrivna med vanliga parenteser snarare än hakparenteser.
- Båda notationerna är vanliga och allmänt accepterade, så länge man är konsekvent.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

Vektorer

- Varje rad och varje kolumn i en matris kallas för en *vektor*.
  - En vektor är detsamma som en n-tupel, men inom linjär algebra använder man normalt sett begreppet vektor.
- Givet $m \times n$-matrisen nedan existerar det m stycken *radvektorer* av längden n och
- n stycken *kolumnvektorer* av längden m.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{bmatrix}$$

Vektorer

- $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rad- och kolumnvektorer från en matris $\boldsymbol{E}$ brukar betecknas med motsvarande gemen:
- 3 stycken radvektorer: $\boldsymbol{e}_{1,*} = (1, 1, 0, 2)$, $\boldsymbol{e}_{2,*} = (0, 2, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_{3,*} = (3, 0, 0, 1)$
- 4 stycken kolumnvektorer: $\boldsymbol{e}_{*,1} = (1, 0, 3)$, $\boldsymbol{e}_{*,2} = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{e}_{*,3} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_{*,4} = (2, 0, 1)$

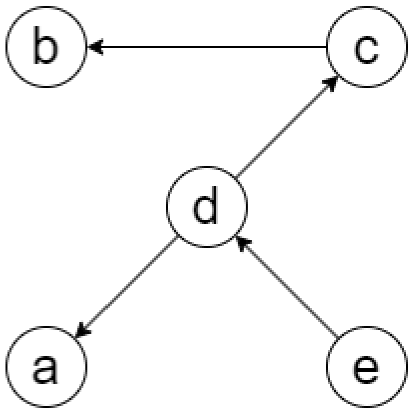
Vektorer, fortsättning

- $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- För att tydliggöra att vissa vektorer utgör kolumner i en matris skriver man ibland:
  - $\boldsymbol{e}_{*,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{*,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{*,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{*,4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, eller
  - $\boldsymbol{e}_{*,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{*,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{*,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{*,4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Grannmatris (Adjacency Matrix)

- En graf består av hörn och kanter, $G = (V, E)$
- En grannmatris innehåller information om vilka noder som har bågar mellan sig.
- Om hörnet v_1 har hörnet v_2 som granne, markerar vi detta med en etta på rätt ställe i matrisen.

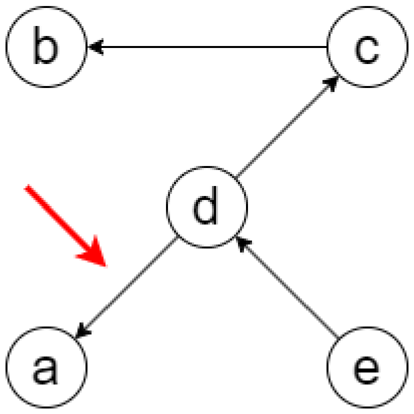
Grannmatrisen



- Om vi har grafen G enligt figuren får vi följande grannmatris (bokstäverna i blått skrivs egentligen inte ut, men är med för tydlighet)
  - riktade bågar indikeras av ettor
  - den riktade bågen från e till d motsvaras av siffran 1 på rad 5, kolumn 4 i matrisen

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

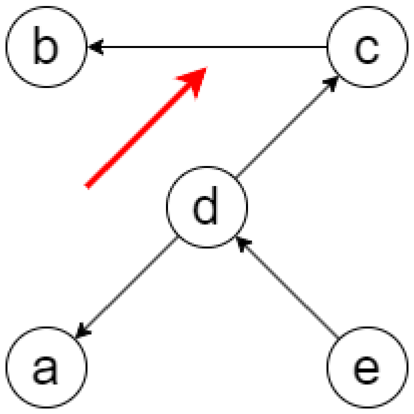
Grannmatrisen



- Om vi har grafen G enligt figuren får vi följande grannmatris (bokstäverna i blått skrivs egentligen inte ut, men är med för tydlighet)
    - riktade bågar indikeras av ettor
    - den riktade bågen från e till d motsvaras av siffran 1 på rad 5, kolumn 4 i matrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

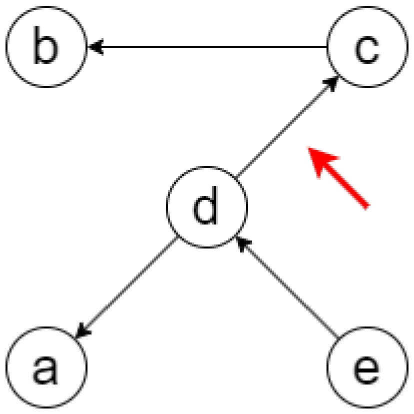
Grannmatrisen



- Om vi har grafen G enligt figuren får vi följande grannmatris (bokstäverna i blått skrivs egentligen inte ut, men är med för tydlighet)
    - riktade bågar indikeras av ettor
    - den riktade bågen från e till d motsvaras av siffran 1 på rad 5, kolumn 4 i matrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

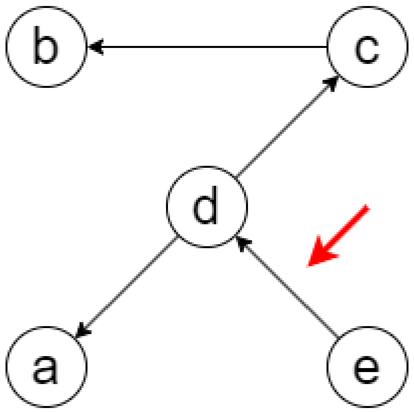
Grannmatrisen



- Om vi har grafen G enligt figuren får vi följande grannmatris (bokstäverna i blått skrivs egentligen inte ut, men är med för tydlighet)
    - riktade bågar indikeras av ettor
    - den riktade bågen från e till d motsvaras av siffran 1 på rad 5, kolumn 4 i matrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Grannmatrisen



- Om vi har grafen G enligt figuren får vi följande grannmatris (bokstäverna i blått skrivs egentligen inte ut, men är med för tydlighet)
  - riktade bågar indikeras av ettor
  - den riktade bågen från e till d motsvaras av siffran 1 på rad 5, kolumn 4 i matrisen

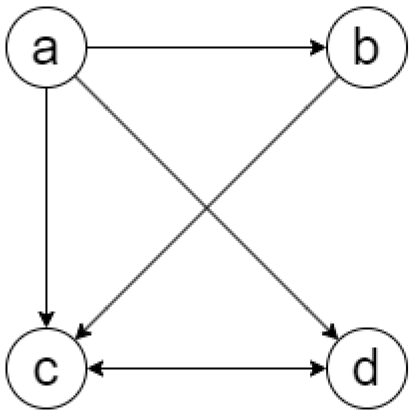
$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Användning av grannmatriser för att räkna ut antal vägar mellan par av noder

Antal vägar mellan två hörn av en viss längd

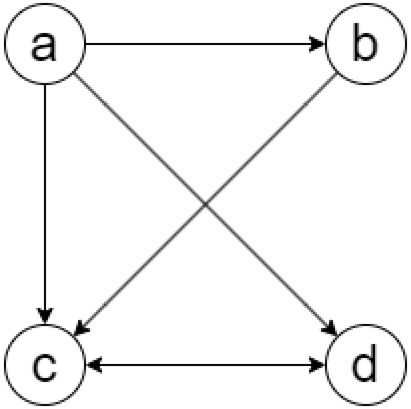
- Om $\boldsymbol{A}$ är grannmatrisen för G, så kan vi få fram antal vägar mellan två noder v_1 och v_2 av längden 1 (eftersom de är grannar).
- Finurlig nog kan vi om vi räknar ut $\boldsymbol{A}^2$ få fram antalet vägar mellan hörn av längden 2.
- Räknar vi ut $\boldsymbol{A}^3$ kan vi få ut antalet vägar mellan två hörn av längden 3.
- osv

Antal vägar mellan två hörn av en viss längd, exempel



- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Följande vägar av längden 1 finns i G
    - 1 väg från a till b
    - 1 väg från a till c
    - 1 väg från a till d
    - 1 väg från b till c
    - 1 väg från c till d
    - 1 väg från d till c

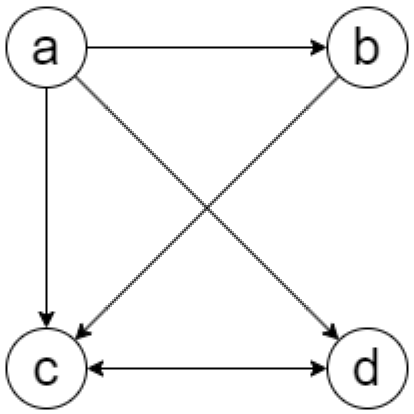
Antal vägar mellan två hörn av en viss längd, exempel



- Följande vägar av längden 2 finns i G
  - 2 vägar från a till c
  - 1 väg från a till d
  - 1 väg från b till d
  - 1 väg från c till c
  - 1 väg från d till d

- $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Antal vägar mellan två hörn av en viss längd, exempel



- $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$
  $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Följande vägar av längden 3 finns i G
  - 1 väg från a till c
  - 2 vägar från a till d
  - 1 väg från b till c
  - 1 väg från c till d
  - 1 väg från d till c

Matrismultiplikation

- För att multiplicera två matriser, $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$, måste antalet **kolumner i $\boldsymbol{A}$** vara **samma som antalet rader i $\boldsymbol{B}$**.
- **Produktmatrisen** kommer ha **lika många rader som $\boldsymbol{A}$** och **lika många kolumner som $\boldsymbol{B}$**.
- Element på plats i, j i produktmatrisen är *skalärprodukten* av radvektor i från $\boldsymbol{A}$ och kolumnvektor j från $\boldsymbol{B}$.

Skalärprodukt

- En *skalär* är ett nördigt ord för ett enskilt värde, t.ex. 3, 42, eller 639 925.
- *Skalärprodukten* är en algebraisk operation mellan två vektorer av samma längd som resulterar i en skalär.
- Kallas ofta "*dot product*" på engelska,
    - (eller "*inner product*" under antagandet att vektorerna är Euklidiska koordinatvektorer, vilket är hur detta ofta lärs ut.)
- Givet vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ av längden i så är skalärprodukten:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i) \cdot (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i$$

Skalärprodukt, exempel

- $\boldsymbol{x} = (1, 0, 4, 2)$
- $\boldsymbol{y} = (3, 2, 6, 5)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= ({\color{red}1}, 0, 4, 2) \cdot ({\color{blue}3}, 2, 6, 5) = \\ &= {\color{red}1} \cdot {\color{blue}3} + \end{aligned}$$

Skalärprodukt, exempel

- $\boldsymbol{x} = (1, 0, 4, 2)$
- $\boldsymbol{y} = (3, 2, 6, 5)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (1, {\color{red}0}, 4, 2) \cdot (3, {\color{blue}2}, 6, 5) = \\ &= 1 \cdot 3 + {\color{red}0} \cdot {\color{blue}2} + \end{aligned}$$

Skalärprodukt, exempel

- $\boldsymbol{x} = (1, 0, 4, 2)$
- $\boldsymbol{y} = (3, 2, 6, 5)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (1, 0, {\color{red}4}, 2) \cdot (3, 2, {\color{blue}6}, 5) = \\ &= 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + {\color{red}4} \cdot {\color{blue}6} + \end{aligned}$$

Skalärprodukt, exempel

- $\boldsymbol{x} = (1, 0, 4, 2)$
- $\boldsymbol{y} = (3, 2, 6, 5)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (1, 0, 4, {\color{red}2}) \cdot (3, 2, 6, {\color{blue}5}) = \\ &= 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + {\color{red}2} \cdot {\color{blue}5} =\end{aligned}$$

Skalärprodukt, exempel

- $\boldsymbol{x} = (1, 0, 4, 2)$
- $\boldsymbol{y} = (3, 2, 6, 5)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (1, 0, 4, 2) \cdot (3, 2, 6, 5) = \\ &= 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = \\ &= 3 + 0 + 24 + 10 =\end{aligned}$$

Skalärprodukt, exempel

- $\boldsymbol{x} = (1, 0, 4, 2)$
- $\boldsymbol{y} = (3, 2, 6, 5)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (1, 0, 4, 2) \cdot (3, 2, 6, 5) = \\
&= 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = \\
&= 3 + 0 + 24 + 10 = \\
&= 37
\end{aligned}$$

Matrismultiplikation, repetition

- För att multiplicera två matriser, A och B, måste antalet __kolumner i__ A vara __samma som antalet rader i__ B.
- __Produktmatrisen__ kommer ha __lika många rader som__ A och __lika många kolumner som__ B.
- Element på plats i, j i produktmatrisen är ***skalärprodukten*** av radvektor i från $\boldsymbol{A}$ och kolumnvektor j från $\boldsymbol{B}$.

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} =$$

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \\ \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \end{bmatrix} =$$

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \\ \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & \\ & \end{bmatrix} =$$

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \\ \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ & \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \\ \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & \end{bmatrix} =$$

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \\ \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} =\end{aligned}$$

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \\ \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

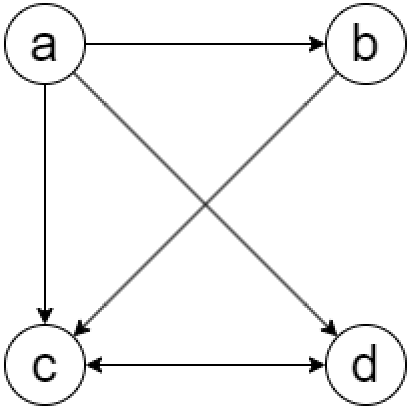
$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \\ \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7 + 18 + 33 & 8 + 20 + 36 \\ 28 + 45 + 66 & 32 + 50 + 72 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Matrismultiplikation, exempel

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

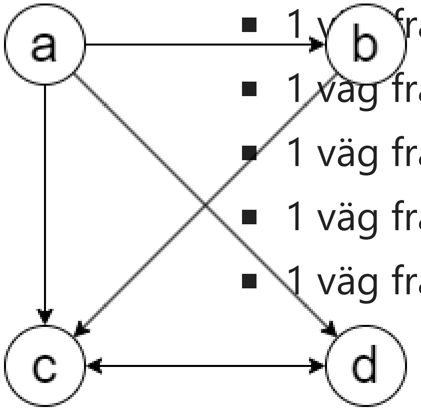
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{1,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \\ \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,1} & \boldsymbol{a}_{2,*} \cdot \boldsymbol{b}_{*,2} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 7 + 18 + 33 & 8 + 20 + 36 \\ 28 + 45 + 66 & 32 + 50 + 72 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Antal vägar mellan två hörn av en viss längd, exempel



Antal vägar mellan två hörn av en viss längd, exempel

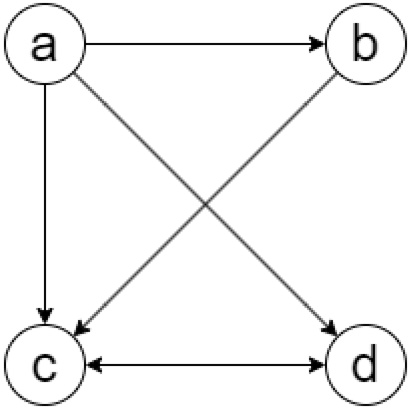
- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Följande vägar av längden 1 finns i G
  - 1 väg från a till b
  - 1 väg från a till c
  - 1 väg från a till d
  - 1 väg från b till c
  - 1 väg från c till d
  - 1 väg från d till c



- Följande vägar av längden 2 finns i G
  - 2 vägar från a till c
  - 1 väg från a till d
  - 1 väg från b till d
  - 1 väg från c till c
  - 1 väg från d till d

- $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Antal vägar mellan två hörn av en viss längd, exempel



- $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$
  $$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- Följande vägar av längden 3 finns i G
  - 1 väg från a till c
  - 2 vägar från a till d
  - 1 väg från b till c
  - 1 väg från c till d
  - 1 väg från d till c

Dela upp problem

Matrismultiplikation

- Multiplicera matriserna $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ med varandra (där $\boldsymbol{A}$ har lika många rader som $\boldsymbol{B}$ har kolumner)
    - För att räkna ut element på plats i, j i produktmatrisen räknar vi skalärprodukten av rad i från $\boldsymbol{A}$ och kolumn j från $\boldsymbol{B}$.
    - Delproblem 1: ta fram rad från en matris
    - Delproblem 2: ta fram kolumn från en matris
    - Delproblem 3: räkna ut skalärprodukt av två vektorer

Parprogrammering

Vad, hur och varför?

Parprogrammering

- Programmeringsmetod där två programmerare sitter vid samma dator och programmerar
- Extreme Programming (XP), Kent Beck sent 90-tal
- I industrin
    - En person, föraren (driver) skriver kod för den valda uppgiften
    - Den andra personen, observatören/navigatören (observer/navigator) granskar koden; funderar på övergripande design
    - Byt roll ofta!
- Studier har visat att
    - designbeslut från par blir bättre jämfört med ensamma programmerare
    - kod från par blir enklare (mindre komplicerad) jämfört med ensamma programmerare

Parprogrammering i undervisning

- Diskutera och bestäm er för vilket **litet** delproblem som ska göras
- **Föraren** jobbar på det lilla delproblemet och skriver koden
- Navigatörens jobb **är** att aktivt granska koden som skrivs
- Navigatörens jobb **är inte** att berätta för föraren exakt vad hen ska skriva, men kan komma med förslag
- Byt roller ofta! Minst en gång varje halvtimme.
- Ni behöver inte lösa delproblemet innan ni byter roller
- Fira när ni löst delproblem

Tre faser och mönster

- **Planering**: innan ni kör iväg
- **Kodproduktion**: när koden skrivs
- **Omstart**: när ni har kört fast

Planering

- Både förslag och genomgång av existerande kod / instruktioner
- Det är OK att säga "*Jag förstår inte*" eller "*Jag vet inte*"
- Tveka inte om att be varandra förtydliga
- Uttryck med egna ord hur du uppfattar situationen
- Undvik fraser som "*du får se om en stund*", försök att förklara för din partner på en gång
- Anteckna så att ni sparar det ni kommer fram till

Kodproduktion

- Föraren
    - berätta hur och vad du tänker
    - du kan stanna upp och prata med/fråga navigatören
    - undviker att bara sitta tyst och vara i sin egen värld
- Navigatören läser koden som skrivs och säger till direkt när hen
    - upptäcker enklare fel
    - inte förstår vad föraren gör, namngivning etc
- Navigatören antecknar och sparar större funderingar till senare, t.ex.
    - potentiella buggar (t.ex. värden som kan resultera i en krasch)
    - funderingar idéer på övergripande design
    - saker som ni missat vid planeringen
- Det är OK att skicka tangentbordet mellan er
    - vissa saker kan vara lättare att uttrycka i kod för navigatören
    - byt roller om det känns bra att göra det

Omstart

- Ni kan byta fokus och prata om annat en kort stund för att kunna tackla problemet med öppen inställning
- Gå igenom er kod se över det ni gjort
- Försök ha målet i sikte medan ni identifierar hur ni ska göra för att komma vidare
- Hitta lämpligt ställe att börja om på
- Om ni inte kommer överrens, kan det vara lämpligt att ta en kort paus, gå på toa/fika etc, lämna arbetsplatsen
- Ge varandra tid att tänka/gå igenom koden