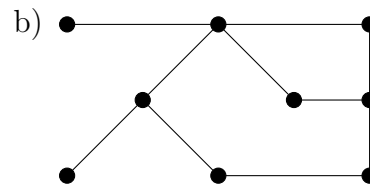
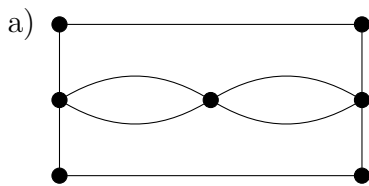


Uppgifter 5: Grafteori

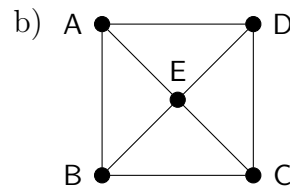
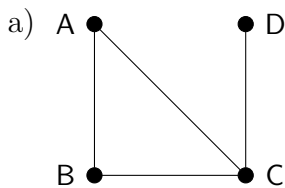
Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Nivå A

5.51 Ange antalet noder och bågar.



5.52 Ange gradtalet för varje nod.

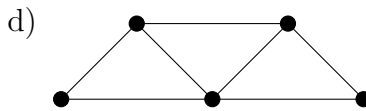
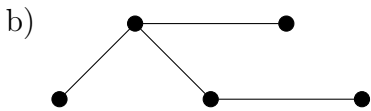
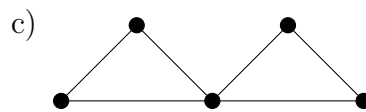
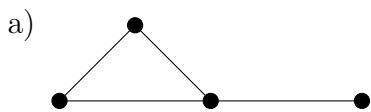


5.53 Hur förändras summan av nodernas gradtal i en graf, om man lägger till en ny båge?

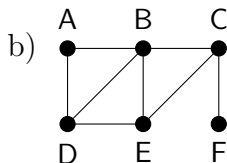
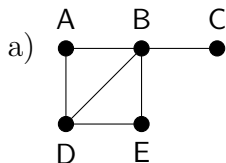
5.54 Ett *träd* är som bekant en sammanhängande graf utan cykler.

- Vad händer om man lägger till en båge till ett träd?
- Vad händer om man tar bort en båge från ett träd?
- Skriv en formel för sambandet mellan antalet noder och antalet bågar i ett träd.

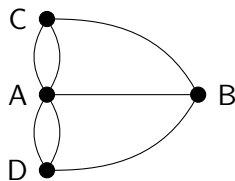
5.55 Innehåller grafen en Eulerväg?



5.56 Avgör om grafen innehåller någon Eulerväg och visa i så fall hur den kan se ut.

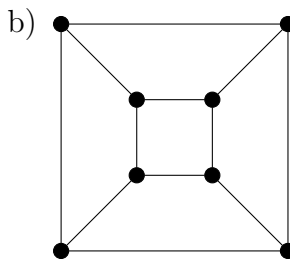
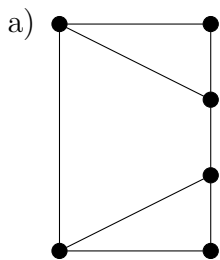


5.57 Promenaden över Königsbergs sju broar är omöjlig att genomföra som en Eulerväg:

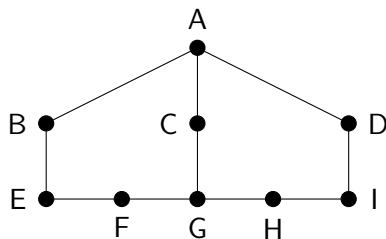


- a) Går det att genomföra promenaden som en Eulerväg om man bygger en ny bro i Königsberg? Var i så fall ska den nya bron byggas?
- b) Går det att genomföra promenaden som en Eulerväg om man river en bro i Königsberg? Vilken bro i så fall ska man riva?

5.58 Avgör om grafen innehåller en Hamiltoncykel eller en Eulercykel.

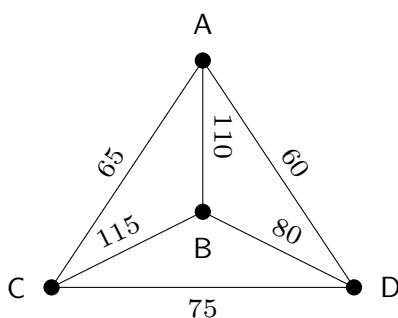


5.59 Grafen här nedan modellerar ett villaområde där noderna representerar husen i området och bågarna representerar gatorna.



- Är det möjligt för en plogbil att ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.
- En ny väg byggs mellan husen B och C. Kan då plogbilen ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.
- Är det möjligt för en brevbärare att bära ut brev till samtliga hus i villaområdet utan att passera samma hus mer än en gång? Motivera ditt svar.

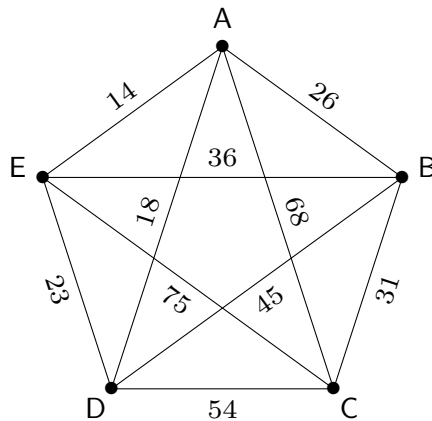
5.60 Denna graf representerar vägnätet mellan fyra städer. Vid varje båge står den tid i minuter som det tar att ta sig mellan två städer.



Du börjar i stad A och vill besöka alla städer innan du återvänder dit.

- Bestäm tiden av den resväg som närmaste granne-metoden ger.
- Undersök om detta är den kortaste resvägen.

- 5.61 Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspannande träd i grafen.



Nivå B

- 5.62 Bevisa att summan av nodernas gradtal i en graf alltid är ett jämnt tal.
- 5.63 Bevisa det så kallade handskakningslemmat: På en fest, med godtyckligt antal besökare, är antalet personer som skakat hand med ett udda antal personer på festen ett jämnt tal.
- 5.64 Vilket villkor gäller för att en graf ska ha *både* en Eulercykel och en Hamiltoncykel? Motivera ditt svar.