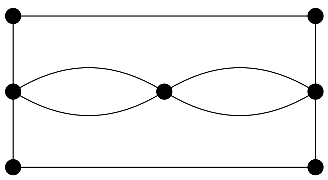
Grunder i matematik och logik (2021)

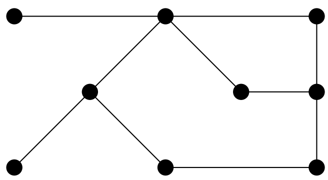
Uppgifter 5: Grafteori

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Nivå A

5.51 Ange antalet noder och bågar.

a) 

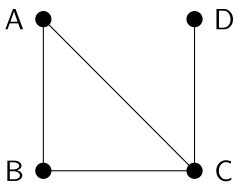
b) 

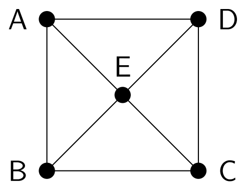
Facit:

a) 7 noder, 10 bågar

b) 9 noder, 10 bågar

5.52 Ange gradtalet för varje nod.

a) 

b) 

Facit:

a) A: 2, B: 2, C: 3, D: 1

b) A: 3, B: 3, C: 3, D: 3, E: 4

5.53 Hur förändras summan av nodernas gradtal i en graf, om man lägger till en ny båge?

Facit: Summan ökar med 2.

5.54 Ett *träd* är som bekant en sammanhängande graf utan cykler.

a) Vad händer om man lägger till en båge till ett träd?

b) Vad händer om man tar bort en båge från ett träd?

c) Skriv en formel för sambandet mellan antalet noder och antalet bågar i ett träd.

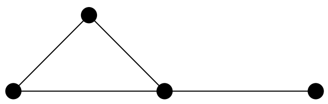
Facit:

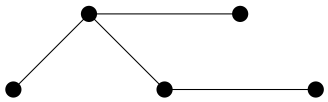
a) Grafen får en cykel.

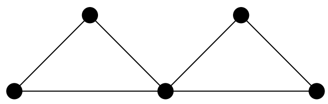
b) Grafen blir osammanhängande. (Närmare bestämd så blir det en skog med två stycken träd i.)

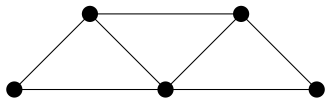
c) antalet bågar = antalet noder − 1

5.55 Innehåller grafen en Eulerväg?

a) 

b) 

c) 

d) 

Facit:

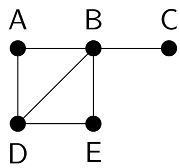
a) ja (två noder med udda gradtal)

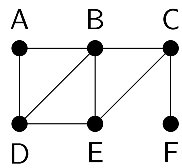
b) nej (fyra noder med udda gradtal)

c) ja (noll noder med udda gradtal)

d) ja (två noder med udda gradtal)

5.56 Avgör om grafen innehåller någon Eulerväg och visa i så fall hur den kan se ut.

a) 

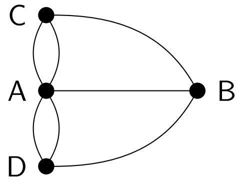
b) 

Facit:

a) exempel: D–A–B–D–E–B–C

b) innehåller ingen Eulerväg

5.57 Promenaden över Königsbergs sju broar är omöjlig att genomföra som en Eulerväg:



a) Går det att genomföra promenaden som en Eulerväg om man bygger en ny bro i Königsberg? Var i så fall ska den nya bron byggas?

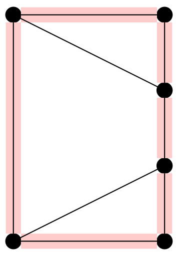
b) Går det att genomföra promenaden som en Eulerväg om man river en bro i Königsberg? Vilken bro i så fall ska man riva?

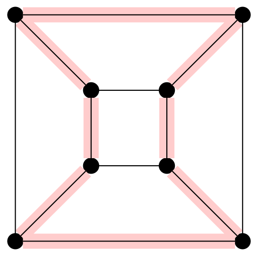
Facit:

a) Ja. Den nya bron kan byggas parallellt med vilken som helst av de gamla broarna.

b) Ja. Det spelar ingen roll vilken bro man river.

5.58 Avgör om grafen innehåller en Hamiltoncykel eller en Eulercykel.

a) 

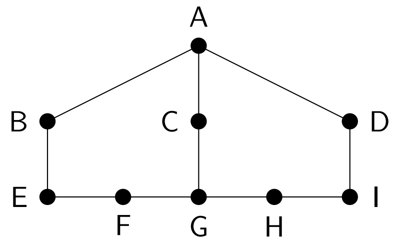
b) 

Facit:

a) innehåller en Hamiltoncykel (markerad) men ingen Eulercykel (fyra noder med udda gradtal)

b) innehåller en Hamiltoncykel (markerad) men ingen Eulercykel (åtta noder med udda gradtal)

5.59 Grafen här nedan modellerar ett villaområde där noderna representerar husen i området och bågarna representerar gatorna.



a) Är det möjligt för en plogbil att ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.

b) En ny väg byggs mellan husen B och C. Kan då plogbilen ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.

c) Är det möjligt för en brevbärare att bära ut brev till samtliga hus i villaområdet utan att passera samma hus mer än en gång? Motivera ditt svar.

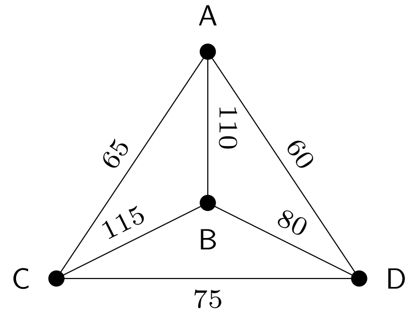
Facit:

a) Ja, eftersom det bara finns två noder med udda gradtal, så finns det en Eulerväg. Exempel: A–B–E–F–G–H–I–D–A–C–G Däremot finns det ingen Eulercykel; plogbilen kan alltså inte köra in i och ut från villaområdet vid samma hus.

b) Nej, då kommer det finnas fyra noder med udda gradtal, vilket betyder att grafen inte kan ha någon Eulerväg.

c) Ja, det finns en Hamiltonväg i grafen. Exempel: B–E–F–G–C–A–D–I–H. Däremot finns det inte någon Hamiltoncykel i grafen; brevbäraren kan alltså inte komma in i och ut från villaområdet vid samma hus.

5.60 Denna graf representerar vägnätet mellan fyra städer. Vid varje båge står den tid i minuter som det tar att ta sig mellan två städer.



Du börjar i stad A och vill besöka alla städer innan du återvänder dit.

a) Bestäm tiden av den resväg som närmaste granne-metoden ger.

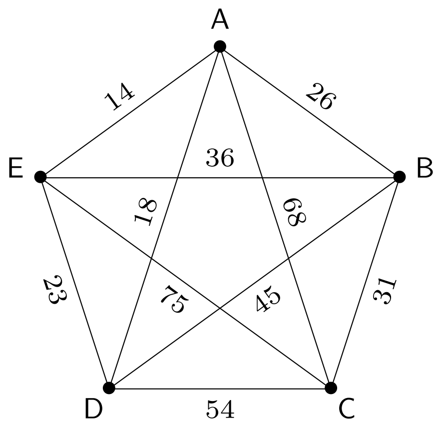
b) Undersök om detta är den kortaste resvägen.

Facit:

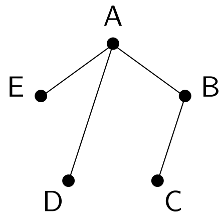
a) A–D–C–B–A, totaltid 360 minuter

b) A–C–B–D–A har kortare totaltid, 320 minuter.

5.61 Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspännande träd i grafen.



Facit:



Nivå B

5.62 Bevisa att summan av nodernas gradtal i en graf alltid är ett jämnt tal.

Facit: Vi skissar på två olika bevis.

Bevis med induktion: Induktion på antalet bågar i grafen. Basfall: Grafen har 0 bågar; då är summan av nodernas gradtal 0, vilket är ett jämnt tal. Induktionssteg: Grafen har minst en båge. Välj ut någon båge och plocka tillfälligt bort den från grafen. För den graf som blir kvar är summan av nodernas gradtal ett jämnt tal (induktionsantagande). När vi lägger tillbaka den bortplockade bågen ökar vi summan med 2 (uppgift 5.53) och vi får därmed återigen ett jämnt tal.

Direkt bevis: Varje båge i grafen bidrar två enheter till summan av nodernas gradtal: en enhet på vardera sida av bågen. Om vi skriver $v_1, \dots, v_n$ för grafens noder (n är antalet noder) och $e_1, \dots, e_m$ för grafens bågar (m är antalet bågar) gäller alltså att

$$\sum_{i=1}^{n} \text{gradtalet för nod } v_i \;=\; \sum_{i=1}^{m} 2 \;=\; 2m$$

Detta visar att summan av nodernas gradtal är ett jämnt tal.

5.63 Bevisa det så kallade handskakningslemmat: På en fest, med godtyckligt antal besökare, är antalet personer som skakat hand med ett udda antal personer på festen ett jämnt tal.

Facit: Situationen kan modelleras som en graf där noderna är festens besökare och det finns en båge mellan två noder om motsvarande personer skakat hand. Vi vet från uppgift 5.62 att summan av nodernas gradtal i en graf alltid är ett jämnt tal. För att en summa ska svara ett jämnt tal måste antalet termer i summan som är udda vara jämnt; om det är ett ojämnt antal så kommer även summan vara ett udda tal. Antalet noder med udda gradtal måste alltså vara ett jämnt tal.

5.64 Vilket villkor gäller för att en graf ska ha *både* en Eulercykel och en Hamiltoncykel? Motivera ditt svar.

Facit: Varje nod måste ha grad 2. För att en graf ska ha en Eulercykel måste varje nod ha ett jämnt gradtal. Antalet gånger man besöker en given nod är då lika med halva den nodens grad. För att en graf ska ha en Hamiltoncykel måste varje nod besökas exakt en gång. Detta innebär att varje nod måste ha grad 2.