Uppgifter 4: Kombinatorik och sannolikhetsteori

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Kombinatorik

Nivå A

4.51 En meny består av tre förrätter, fem huvudrätter och två efterrätter. På hur många olika sätt kan man välja en trerättersmeny?

Facit: $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$

4.52 Hur många möjliga fyrsiffriga cykellåskoder kan man skapa om varje kod skapas med hjälp av siffrorna 0 till och med 9?

Facit: $10^4 = 10\,000$

4.53 Ett visst användarnamn ska bestå av åtta tecken. De tillåtna tecknen är de tio siffrorna 0 till och med 9 samt det engelska alfabetets 26 bokstäver (endast små bokstäver).

a) Hur många olika användarnamn kan man skapa med dessa tecken?

b) Hur många kan man skapa om första tecknet ska vara en bokstav?

Facit:

a) $(10 + 26)^8 = 2\,821\,109\,907\,456$

b) $26 \cdot (10 + 26)^7 = 2\,037\,468\,266\,496$

4.54 En klass på en utbildning med en mera balanserad könsfördelning än IP ska välja ordförande och vice ordförande till klassrådet. De har bestämt att de ska välja en tjej och en kille. Klassen består av 16 tjejer och 10 killar. På hur många olika sätt kan de välja ordförande och vice ordförande?

Facit: $16 \cdot 10 + 10 \cdot 16 = 2 \cdot 16 \cdot 10 = 320$

4.55 Använd lådprincipen för att visa att en pokerhand med fem kort alltid kommer att innehålla minst två kort av samma färg (spader, hjärter, ruter, klöver).

Facit: Vi placerar fem föremål (kort) i fyra lådor (färger); då kommer minst en låda (färg) innehålla mer än ett föremål (kort).

4.56 Hur många personer måste minst vara i ett rum, om vi ska vara säkra på att det finns minst två personer som fyller år samma månad?

Facit: Tretton personer. Om vi placerar tretton föremål (personer) i tolv lådor (månader) kommer minst en låda (månad) innehålla mer än ett föremål (person).

4.57 Tessa lagrar data i en tvådimensionell array med dimensionerna 4×7 (antalet rader gånger antalet kolumner). Hur många data måste hon lagra i arrayen för att säkert en av raderna ska vara fullsatt, under antagandet att varje cell av arrayen bara rymmer ett datum?

Facit: 25 data.

4.58 Er klass har 30 studenter. På hur många olika sätt kan ni välja en ordförande och en vice ordförande till klassrådet?

Facit: $30 \cdot 29 = 870$

4.59 Ett anagram är ett ord som man får genom att kasta om bokstäverna i ett annat ord. En enkel men ineffektiv algoritm för att hitta anagram är att kasta om bokstäverna i grundordet på alla möjliga sätt och för varje bokstavskombination testa om den finns med i en ordbok. Hur många uppslagningar måste man då göra för ordet ABSURD?

Facit: $6! = 720$

4.60 I det svenska alfabetet finns 29 bokstäver. Hur många bokstavskombinationer med fyra bokstäver kan bildas om bokstäverna ska vara olika?

Facit: $\dfrac{29!}{(29-4)!} = 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 570\,024$

4.61 En kompis berättar för dig att hen har en jättebra pinkod: alla fyra siffror är olika! Hur många procent av alla pinkoder har denna egenskap?

Facit: Det totala antalet PIN-koder är $10^4 = 10000$. Hur många PIN-koder har olika siffor? Den relevanta paradigmen för denna fråga är ”med ordning, utan repetition”. Vi vill välja ut siffror från 0 till 9 till de fyra olika platserna i koden.

$$\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

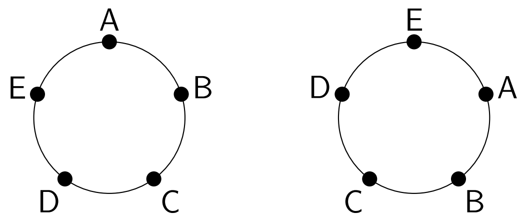
Detta innebär att 50,40% av alla PIN-koder är sådana att alla fyra siffror är olika.

4.62 I en pizzeria kan man välja mellan 6 olika tillbehör till pizzorna. Hur många pizzor kan man baka med 3 olika tillbehör?

Facit: $C(6,3) = \dfrac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = 20$

Nivå B

4.63 En *cyklisk ordning* är ett sätt att ordna ett antal objekt i en ring. En vridning av ringen påverkar inte ordningen. I figuren representeras alltså två olika sätt att rita samma cykliska ordning av de fem bokstäverna A–E.



a) På hur många olika sätt kan man ordna fem bokstäver i en ring?

b) På hur många olika sätt kan man ordna fem olika bokstäver i en ring om man har alla 29 bokstäver ur det svenska alfabetet att välja bland?

Facit:

a) $\dfrac{5!}{5} = 4! = 24$

b) $\dfrac{29!}{(29-5)!5} = 2\,850\,120$

4.64 På ett ungefär, minst hur många svenskar är lika långa på en mikrometer (1 µm) när? Gör rimliga antaganden om storlek och antal.

Facit: Räknar vi med att skillnaden mellan den som är längst och den som är kortast är $2\,\mathrm{m} = 2 \times 10^6\,\mu\mathrm{m}$, så är kvoten mellan antalet invånare (föremål) och antalet längdintervall (lådor)

$$\frac{10 \times 10^6}{2 \times 10^6} = 5$$

Vi skulle då med säkerhet kunna säga att minst fyra svenskar kommer att vara inom samma längdintervall, dvs. vara lika långa på 1 µm när.

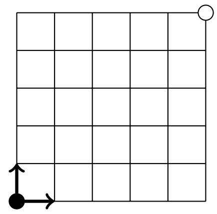
4.65 Visa att för alla möjliga värden för n och k,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Facit: Vi räknar ut båda sidor och verifierar att de ger samma värde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4.66 Hur många olika vägar finns det från den svarta punkten till den vita punkten om du i varje steg bara får gå som indikerats med pilarna?



Facit: Man ser att varje väg från den svarta punkten till den vita punkten måste bestå av 10 steg: 5 stycken upp-steg och 5 stycken höger-steg. Dessa kan blandas fritt. Det vi kan välja är exakt vilka 5 av de totalt 10 steg i vandringen ska vara upp-steg; de övriga stegen måste då bli höger-steg. Svaret blir därmed $\binom{10}{5} = 252$.

4.67 Följande formel ger antalet möjliga sätt att välja $n-1$ element ur en mängd med n element med repetition och utan hänsyn till ordning:

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

a) Visa att denna formel även ger antalet möjliga sätt att välja k element ur en mängd med $n+k-1$ element utan repetition och utan hänsyn till ordning.

b) Peter säljer fruktkorgar med apelsiner, bananer och päron. Hur många olika korgar kan han komponera om det ska vara 6 stycken frukt i varje korg?

c) Hur många blir det om varje korg ska innehålla minst en frukt av varje sort?

Facit:

a) Vi räknar ut båda sidor och verifierar att de ger samma värde:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{((n+k-1)-(n-1))!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{((n+k-1)-k)!k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

b) Vi sätter in $n = 3$ och $k = 6$ i formeln:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{3+6-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

Svaret blir därmed 28 olika korgar.

c) Lägger han en frukt av varje sort i varje korg så behöver han fortfarande välja 3 stycken frukt. Vi sätter in $n = k = 3$ i formeln:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Svaret blir därmed 10 olika korgar.

Sannolikhetsteori

Nivå A

4.68 En burk innehåller fem vita och tre svarta kulor. Du tar slumpvis en kula ur burken. Hur stor är sannolikheten att du får en

a) vit kula? b) svart kula?

Facit:

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{3}{8}$

4.69 Du singlar slant.

a) Hur många möjliga utfall finns det?

b) Hur stor är sannolikheten för ”krona”?

c) Ungefär hur många gånger på 1 000 kast bör du få ”krona”?

Facit:

a) två utfall: krona och klave

b) $\frac{1}{2}$

c) 500 gånger

4.70 Du kastar tärning.

a) Hur stor är sannolikheten att du får ett jämnt antal prickar?

b) Hur många gånger kan du förvänta dig att få ett jämnt antal prickar om du kastar tärning 120 gånger?

Facit:

a) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) 60 gånger

4.71 I ett lotteri finns 500 lotter. Sannolikheten att få en vinstlott är 5%.

a) Hur många vinstlotter finns det?

b) Hur många nitlotter finns det?

c) Hur många vinster är det sannolikt att du får om du köper 40 lotter?

Facit:

a) 25 stycken

b) 475 stycken

c) 2 vinster

4.72 Du kastar en tärning fem gånger och får en sexa varje gång.

a) Hur stor är sannolikheten att du får en sexa i nästa kast?

b) Hur stor är sannolikheten att du får en etta i nästa kast?

Facit:

a) $\dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{1}{6}$

4.73 Du drar två kort ur en kortlek.

a) Vad är sannolikheten att det första kortet är hjärter?

b) Anta att det första kortet är hjärter. Vad är då sannolikheten att även det andra kortet är hjärter?

c) Vad är sannolikheten att båda kort är hjärter?

Facit:

a) $\dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{12}{51}$

c) $\dfrac{13}{52} \cdot \dfrac{12}{51} = \dfrac{1}{17}$

4.74 Ett test som ska visa om man har en viss sjukdom har en säkerhet på 99%:

- Om man har sjukdomen kommer man testas positivt i 99% av fallen.
- Om man inte har sjukdomen kommer man testas negativt i 99% av fallen.

Antag att 1% av befolkningen har den relevanta sjukdomen.

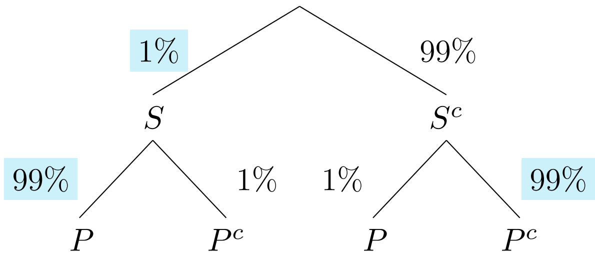
a) Rita ett träddiagram för denna fråga.

b) Vad är sannolikheten för att en slumpmässigt utvald person testas positivt på sjukdomen? Svara genom att ange ett procenttal. Visa hur du räknat.

c) Den utvalda personen testas positivt. Vad är sannolikheten att hen har sjukdomen? Svara genom att ange ett procenttal. Visa hur du räknat.

Facit:

a) Vi skriver S för händelsen ”patienten har sjukdomen” och P för ”patienten testas positivt”. De markerade sannolikheterna kan direkt avläsas ur uppgiften; de övriga följer från ett enkelt resonemang kring komplementhändelser.



b) Sannolikheten kan tecknas som $P(P)$. Med lagen om total sannolikhet:

$$P(P) = P(S) \cdot P(P|S) + P(S^c) \cdot P(P|S^c) = 0{,}01 \cdot 0{,}99 + 0{,}99 \cdot 0{,}01 = 0{,}0198$$

Svaret är därmed 1,98%.

c) Sannolikheten kan tecknas som $P(S|P)$. Med Bayes' lag:

$$P(S|P) = \frac{P(P|S)P(S)}{P(P)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}01}{0{,}0198} = 0{,}5$$

Svaret är därmed 50%. (Det är alltså ganska meningslöst att ta testet.)

Nivå B

4.75 En variant på det så kallade födelsedagsproblemet.

a) Hur sannolikt är det att två personer är födda på samma veckodag? Utgå ifrån en uniform sannolikhetsfördelning. Ledning: Börja med att beräkna sannolikheten för komplementhändelsen.

b) Hur många personer måste det vara för att sannolikheten för att minst två personer är födda på samma veckodag är större än 50%? Generalisera ditt svar på den föregående deluppgiften.

Facit:

a) Sannolikheten för att den andra personen *inte* föddes samma veckodag är

$$\frac{6}{7} \approx 85{,}7\%$$

Sannolikheten för att hen föddes samma veckodag som den första personen är därmed circa 14,3%.

b) Man kan testa sig fram. Sannolikheten för att fyra studenter är födda på *olika* dagar är

$$\frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{120}{343} \approx 40\%$$

Sannolikheten för minst två föddes samma veckodag är därmed circa 60%. För tre studenter är sannolikheten circa 49%.

4.76 Du presenteras tre stängda dörrar – bakom en finns en bil, och bakom de två andra finns två getter. Du blir ombedd att välja en dörr; men du ska inte öppna den än. Om du valt dörren som gömmer bilen vinner du den.

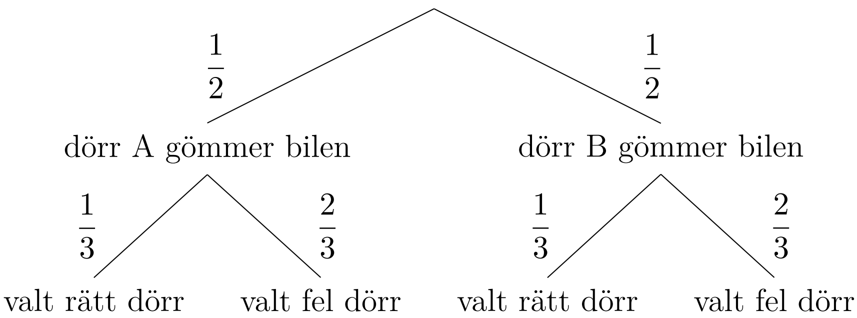
a) Hur stor är chansen att du väljer dörren som döljer bilen?

b) Monty Hall, som vet var bilen finns, öppnar istället en av de två övriga dörrarna och visar att denna dörr döljer en get. Han frågar dig därefter om du vill hålla fast vid ditt val eller byta till den andra oöppnade dörren. Hur förändras dina vinstchanser om du byter?

Facit:

a) $\frac{1}{3}$

b) Vinstchanserna fördubblas. Ett sätt att inse detta är att modellera situationen som ett slumpförsök i två steg. Efter att Monty Hall har öppnat dörren med geten måste bilen finnas, med lika stor sannolikhet, bakom en av de två andra dörrarna, som vi kan kalla A och B. I slumpförsökets andra steg frågar vi oss om vi valt dörren som gömmer bilen (”rätt dörr”) eller dörren med geten (”fel dörr”). Vi ritar ett träddiagram:



Med lagen om total sannolikhet ser vi att chansen att bilen står bakom den dörr som vi valt från början fortfarande är 1 av 3. Chansen att bilen står bakom den tredje dörren däremot är 2 av 3.