

## Uppgifter 3: Talteori

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

### Delbarhet

3.51 Sant eller falskt? Motivera med delbarhetsdefinitionen.

a)  $5 \mid 510$

c)  $3 \nmid 438$

b)  $4 \mid 116$

d)  $6 \mid 404$

*Facit:*

a) sant (ty  $510 = 102 \cdot 5$ )

c) falskt (ty  $438 = 146 \cdot 3$ )

b) sant (ty  $116 = 29 \cdot 4$ )

d) falskt

3.52 Ange de positiva delarna till talen

a) 12

c) 17

b) 32

d) 30

*Facit:*

a) 1, 2, 3, 4, 6, 12

c) 1, 17

b) 1, 2, 4, 8, 16, 32

d) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

3.53 För vilka värden på heltalet  $a$  gäller att  $a \mid 0$ ?

*Facit:* För alla heltal  $a \neq 0$ . Talet 0 kan skrivas som  $0 = 0 \cdot a$  för vilket heltal  $a$  som helst. I definitionen av delbarhetsrelationen uteslöt vi dock explicit  $a = 0$ .

3.54 Visa att följande tal är delbara med 7.

a)  $21 \cdot 242$

b)  $35 + 77$

c)  $14 \cdot 62 + 15 \cdot 63$

*Facit:*

a) En produkt är delbar med 7 om minst en av dess faktorer är delbar med 7. Här är faktorn 21 är delbar med 7 ( $21 = 3 \cdot 7$ ).

b) En summa är delbar med 7 om båda termerna i summan är delbara med 7. Termen 35 är delbar med 7 ( $35 = 5 \cdot 7$ ); termen 77 är också delbar med 7 ( $77 = 11 \cdot 7$ ).

c) När vi kombinerar de föregående två resonemangen ser vi att det räcker att visa att 14 är delbar med 7 (gäller ty  $14 = 2 \cdot 7$ ) och att 63 är delbar med 7 (gäller ty  $63 = 9 \cdot 7$ ).

3.55 För ett positivt heltal  $a$  betecknar  $s(a)$  summan av alla dess positiva delare, med undantag av talet själv. Exempel:  $s(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ . Talet  $a$  kallas

*fattigt* om  $s(a) < a$ , *rikt* om  $s(a) > a$ , *perfekt* om  $s(a) = a$ .

a) Det finns ett perfekt tal som är mindre än 10. Vilket är talet?

b) Vilka tal  $a$  i intervallet  $25 \leq a \leq 30$  är fattiga tal, rika tal respektive perfekta tal?

*Facit:*

a) 6, ty  $1 + 2 + 3 = 6$

b) Talet 30 är rikt, talet 28 är perfekt, alla andra tal är fattiga.

## Primtal

3.56 Är talet ett primtal? Om inte, dela upp talet i primfaktorer.

a) 27

b) 29

c) 54

d) 93

*Facit:*

a)  $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$

c)  $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

b) primtal

d)  $93 = 3 \cdot 31$

3.57 Ett Mersennetal är ett tal av typen  $m = 2^p - 1$ , där  $p$  är ett primtal. Ett Mersenneprimtal är ett Mersennetal som också är ett primtal. Mersenneprimtal är förhållandevis lätta att hitta. Hittills<sup>1</sup> har 51 Mersenneprimtal hittats; det största av dessa är också det största kända primtalet. Det är okänt huruvida det finns oändligt många Mersenneprimtal.

a) Det finns två Mersenneprimtal som är mindre än 10. Vilka är talen?

b) Ange ett Mersennetal som inte är ett Mersenneprimtal.

*Facit:*

a)  $m = 3$  (med  $p = 2$ ) och  $m = 7$  (med  $p = 3$ )

b)  $m = 2047$  (med  $p = 11$ )

## Kvot och rest

3.58 Beräkna kvoten  $k$  och resten  $r$  vid följande divisioner.

a)  $\frac{47}{6}$

b)  $\frac{152}{7}$

c)  $\frac{2}{4}$

d)  $\frac{207}{9}$

*Facit:*

a)  $k = 7, r = 5$

b)  $k = 21, r = 5$

c)  $k = 0, r = 2$

d)  $k = 23, r = 0$

3.59 En analog klocka visar 20 minuter över nio. Vad visar samma klocka om

a) 100 timmar

b) 730 minuter

*Facit:*

a) Vi delar 100 timmar med 12 (antalet timmar på dagen) och får kvot 8, rest 4. Detta innebär att klockan visar tiden 4 timmar efter nuvarande tid, dvs. 20 minuter över ett.

b) Vi delar 730 minuter med 60 (antalet minuter på en timme) och får kvot 12, rest 10. Detta innebär att klockan visar tiden 10 minuter efter nuvarande tid, dvs. halv tio.

---

<sup>1</sup>mars 2021

- 3.60 Visa att om talet som bildats av de två sista siffrorna i ett tal  $n \geq 0$  är delbart med 4, så är också  $n$  delbart med 4.

*Facit:* Talet  $n$  kan skrivas som  $n = 100a + b$  där  $a \geq 0$  och  $0 \leq b \leq 99$  betecknar talet som bildats av de två sista siffrorna i  $n$ . Om det senare talet är delbart med 4 så kan vi skriva  $b = 4k$  för något  $k \geq 0$ . När vi sätter in  $k$  i vår expansion av  $n$  ser vi att  $n$  är delbart med 4:

$$n = 100a + b = 100a + 4k = 4 \cdot (25a + k).$$

## Största gemensamma delare

- 3.61 Bestäm största gemensamma delaren till följande tal:

- |                 |                  |
|-----------------|------------------|
| a) 18 och 150   | e) 936 och 248   |
| b) 238 och 510  | f) 364 och 7448  |
| c) 650 och 3850 | g) 2509 och 1621 |
| d) 600 och 650  | h) 1547 och 221  |

*Facit:*

- |       |       |       |        |
|-------|-------|-------|--------|
| a) 6  | c) 50 | e) 8  | g) 1   |
| b) 34 | d) 50 | f) 28 | h) 221 |

- 3.62 Två tal heter *relativt prima* om deras största gemensamma delare är 1. Vilka av följande talpar är relativt prima?

- |                |                  |
|----------------|------------------|
| a) 12 och 35   | c) 325 och 4851  |
| b) 438 och 588 | d) 1625 och 2499 |

*Facit:*

- |                  |       |
|------------------|-------|
| a) ja            | c) ja |
| b) nej (sgd = 6) | d) ja |