Grunder i matematik och logik (2021)

Uppgifter 2: Induktion och rekursion

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Talföljder och summor

2.51 Ange de 5 första elementen i talföljden som beskrivs av $a_n = 4n + 3$.

2.52 Ange det femte elementet i talföljden som beskrivs av

a) $a_n = \dfrac{n^2}{2} + 2n$ b) $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

2.53 Skriv summorna utan att använda summatecknet $\sum$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 5k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} (2^k + 1)$

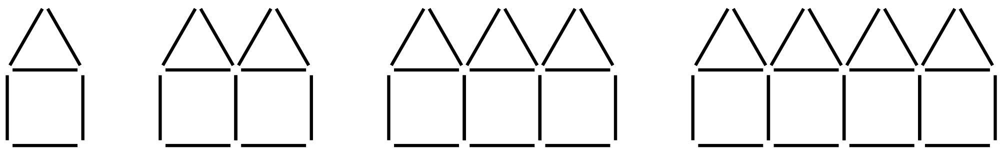
2.54 Skriv summorna med hjälp av summatecknet $\sum$ och tillhörande formel.

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$

b) $2 + 5 + 8 + 11 + 14$

c) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

2.55 Nedanstående figurer är byggda av tändstickor:



a) Beskriv antalet stickor i varje figur med en rekursiv formel.

b) Beskriv antalet stickor i varje figur med en sluten formel.

c) Hur många stickor behövs för att bygga den 10:e figuren?

2.56 Beskriv följande talföljder med en sluten formel.

a) $1, 4, 9, 16, 25$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$

2.57 Teckna summan med hjälp av summatecknet $\sum$ och tillhörande slutna formler.

a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

b) $10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320$

Aritmetiska talföljder och summor

2.58 Avgör om följande talföljder är aritmetiska, geometriska, både och, eller ingendera.

a) $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$

b) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$

c) $0, \frac{1}{3}, \frac{4}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{35}{21}, \frac{4}{2}, \frac{14}{6}, \frac{8}{3}, \sqrt[3]{27}$

d) $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683$

e) $42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42$

2.59 En aritmetisk talföljd har $a_1 = 7$ och $d = 1{,}3$. Bestäm a_7.

2.60 Låt $s_{42} = \displaystyle\sum_{k=1}^{42} 3k + 2$.

a) Varför är det en aritmetisk summa?

b) Beräkna summan.

2.61 En aritmetisk talföljd har $a_1 = 102$ och $d = -3$.

a) Bestäm a_{21}.

b) Bestäm summan av de 21 första elementen.

2.62 En talföljd beskrivs genom formeln $a_n = 3n + 1$, där $n \geq 1$.

a) Bestäm de 4 första elementen i talföljden.

b) Är talföljden aritmetisk?

c) Beskriv talföljden med en rekursiv formel.

2.63 Hur många element har den aritmetiska talföljden $5, 12, \dots, 537$?

2.64 Beräkna den aritmetiska summan $7 + 10 + \cdots + 49$.

2.65 I en aritmetisk talföljd är $a_6 = 42$ och $a_9 = 60$. Beräkna a_1.

2.66 Beräkna summan av de 25 första termerna i den aritmetiska talföljd som beskrivs av formeln

a) $a_n = 2 + 6n$

b) $b_1 = 4$; $b_n = 11 + b_{n-1}$ för $n > 1$

2.67 En aritmetisk talföljd innehåller elementen $9, 7, 5, 3, \ldots$.

a) Beskriv talföljden med en sluten formel.

b) Bestäm en förenklad formel för summan av de n första termerna i talföljden.

Geometriska talföljder och summor

2.68 Här är en geometrisk talföljd: $4, 12, 36, 108, \ldots$

a) Bestäm a_1 och k.

b) Beskriv talföljden med en formel.

2.69 En geometrisk talföljd beskrivs av formeln

$$a_n = 0{,}5 \cdot (-3)^{n-1} \qquad \text{för } n = 1, \ldots, 7$$

a) Hur många element innehåller talföljden?

b) Bestäm det första och det sista elementet.

2.70 Uttrycket $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 3 \cdot 2^9$ är en geometrisk summa.

a) Hur många termer finns i summan?

b) Beräkna summans värde.

2.71 Talen $x-6$, x och $x+18$ är tre på varandra följande element i en viss geometrisk talföljd. Bestäm vilka tal det är.

Induktionsbevis

2.72 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n^2 + n$$

2.73 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$$

2.74 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

2.75 Låt a_n vara det n:te udda naturliga talet.

a) Hur kan talet a_n skrivas med hjälp av n?

b) Konstruera en formel för att beräkna den aritmetiska summan $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

c) Visa med hjälp av induktion att din formel gäller för alla värden på n.

2.76 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

2.77 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} (4k+3) = (n+1)(2n+3)$$

2.78 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} (5k+1) = \frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$

Nivå B

2.79 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} k^i = \frac{k^n - 1}{k - 1} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

2.80 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

2.81 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

2.82 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

2.83 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2.84 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$3^n \geq 1 + 2n$$

2.85 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 3$:

$$3^n \geq n^3$$

2.86 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \quad \leq \quad n^2$$

2.87 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \leq \quad n^3$$

2.88 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \leq \quad 2 - \frac{1}{n}$$

2.89 Visa att följande gäller för nästan alla naturliga tal n:

$$n! > 2^n$$

Vad betyder ”nästan alla” i det här sammanhanget?