Grunder i matematik och logik (2021)

Uppgifter 2: Induktion och rekursion

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Talföljder och summor

2.51 Ange de 5 första elementen i talföljden som beskrivs av $a_n = 4n + 3$.

Facit: $7, 11, 15, 19, 23$

2.52 Ange det femte elementet i talföljden som beskrivs av

a) $a_n = \dfrac{n^2}{2} + 2n$ b) $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

Facit:

a) $a_5 = 22{,}5$ b) $b_5 = 80$

2.53 Skriv summorna utan att använda summatecknet $\sum$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 5k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} (2^k + 1)$

Facit:

a) $5 + 10 + 15 + 20 + 25$ b) $2 + 3 + 5 + 9 + 17$

2.54 Skriv summorna med hjälp av summatecknet $\sum$ och tillhörande formel.

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$

b) $2 + 5 + 8 + 11 + 14$

c) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

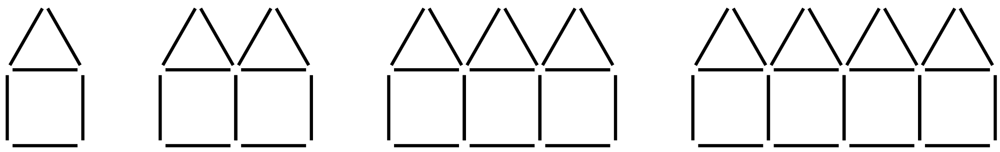
Facit:

a) $\sum_{k=1}^{8} 2k$

b) $\sum_{k=1}^{5} 3k - 1$

c) $\sum_{k=1}^{7} 2^k$

2.55 Nedanstående figurer är byggda av tändstickor:



a) Beskriv antalet stickor i varje figur med en rekursiv formel.

b) Beskriv antalet stickor i varje figur med en sluten formel.

c) Hur många stickor behövs för att bygga den 10:e figuren?

Facit:

a) $a_1 = 6$; $a_n = a_{n-1} + 5$ för $n > 1$

b) $a_n = 5n + 1$

c) 51 st

2.56 Beskriv följande talföljder med en sluten formel.

a) $1, 4, 9, 16, 25$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$

Facit:

a) $a_n = n^2$ för $1 \leq n \leq 5$

b) $a_n = \frac{1}{2n-1}$ för $1 \leq n \leq 5$

2.57 Teckna summan med hjälp av summatecknet $\sum$ och tillhörande slutna formler.

a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

b) $10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320$

Facit:

a) $\sum_{k=0}^{6} 2^k$

b) $\sum_{k=1}^{6} 5 \cdot 2^k$

Aritmetiska talföljder och summor

2.58 Avgör om följande talföljder är aritmetiska, geometriska, både och, eller ingendera.

a) $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$

b) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$

c) $0, \frac{1}{3}, \frac{4}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{35}{21}, \frac{4}{2}, \frac{14}{6}, \frac{8}{3}, \sqrt[3]{27}$

d) $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683$

e) $42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42$

Facit:

a) aritmetisk talföljd med $a_1 = 0$ och $d = 2$

b) vare sig aritmetisk eller geometrisk (Fibonaccis talföljd)

c) aritmetisk talföljd med $a_1 = 0$ och $d = \frac{1}{3}$

d) geometrisk talföljd med $a_1 = 1$ och $k = 3$

e) både aritmetisk ($a_1 = 42$, $d = 0$) och geometrisk ($a_1 = 42$, $k = 1$)

2.59 En aritmetisk talföljd har $a_1 = 7$ och $d = 1{,}3$. Bestäm a_7.

Facit: $a_7 = a_1 + (7-1) \cdot d = 7 + (7-1) \cdot 1{,}3 = 14{,}8$

2.60 Låt $s_{42} = \displaystyle\sum_{k=1}^{42} 3k + 2$.

a) Varför är det en aritmetisk summa?

b) Beräkna summan.

Facit:

a) Differensen mellan varje term är konstant ($d = 3$).

b) $s_{42} = \dfrac{42 \cdot (5 + 128)}{2} = 2793$

2.61 En aritmetisk talföljd har $a_1 = 102$ och $d = -3$.

a) Bestäm a_{21}.

b) Bestäm summan av de 21 första elementen.

Facit:

a) $a_{21} = a_1 + (21-1) \cdot d = 102 + 20 \cdot (-3) = 42$

b) $s_{21} = \dfrac{21 \cdot (a_1 + a_{21})}{2} = \dfrac{21 \cdot (102 + 42)}{2} = 1512$

2.62 En talföljd beskrivs genom formeln $a_n = 3n + 1$, där $n \geq 1$.

a) Bestäm de 4 första elementen i talföljden.

b) Är talföljden aritmetisk?

c) Beskriv talföljden med en rekursiv formel.

Facit:

a) $4, 7, 10, 13$

b) Ja; differensen mellan varje term är konstant ($d = 3$).

c) $a_1 = 4$; $a_n = a_{n-1} + 3$ för $n > 1$

2.63 Hur många element har den aritmetiska talföljden $5, 12, \ldots, 537$?

Facit: 77 st. Enligt formeln för det n:te elementet har vi $a_n = a_1 + (n-1)d$ och här mera specifikt att $537 = 5 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 2$. Genom att lösa för n får vi $n = 77$.

2.64 Beräkna den aritmetiska summan $7 + 10 + \cdots + 49$.

Facit: 420. Den angivna summan har 15 element: Vi vet att $a_n = a_1 + (n-1)d$ och här mera specifikt att $49 = 7 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 4$; genom att lösa för n får vi $n = 15$. Enligt formeln för aritmetiska summor gäller

$$s_{15} = \frac{15 \cdot (7 + 49)}{2} = 420$$

2.65 I en aritmetisk talföljd är $a_6 = 42$ och $a_9 = 60$. Beräkna a_1.

Facit: Eftersom differensen mellan varje term är konstant gäller $a_9 - a_6 = 3d$ och därmed $d = 6$. Enligt formeln för det n:te elementet har vi $a_6 = a_1 + (6-1)d$ och här mera specifikt $42 = a_1 + (6-1) \cdot 6$. Genom att lösa för a_1 får vi $a_1 = 12$.

2.66 Beräkna summan av de 25 första termerna i den aritmetiska talföljd som beskrivs av formeln

a) $a_n = 2 + 6n$

b) $b_1 = 4$; $b_n = 11 + b_{n-1}$ för $n > 1$

Facit:

a) $s_{25} = \dfrac{25 \cdot (a_1 + a_{25})}{2} = \dfrac{25 \cdot (8 + 152)}{2} = 2000$

b) $s_{25} = \dfrac{25 \cdot (b_1 + b_{25})}{2} = \dfrac{25 \cdot (4 + 268)}{2} = 3400$

2.67 En aritmetisk talföljd innehåller elementen $9, 7, 5, 3, \ldots$.

a) Beskriv talföljden med en sluten formel.

b) Bestäm en förenklad formel för summan av de n första termerna i talföljden.

Facit:

a) $a_n = 9 + (n-1) \cdot (-2) = 11 - 2n$

b) $s_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{n \cdot (9 + (11 - 2n))}{2} = \dfrac{20n - 2n^2}{2} = 10n - n^2$

Geometriska talföljder och summor

2.68 Här är en geometrisk talföljd: $4, 12, 36, 108, \ldots$

a) Bestäm a_1 och k.

b) Beskriv talföljden med en formel.

Facit:

a) $a_1 = 4$; $k = 3$

b) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

2.69 En geometrisk talföljd beskrivs av formeln

$$a_n = 0{,}5 \cdot (-3)^{n-1} \qquad \text{för } n = 1, \ldots, 7$$

a) Hur många element innehåller talföljden?

b) Bestäm det första och det sista elementet.

Facit:

a) 7 st

b) $a_1 = 0{,}5$; $a_7 = 0{,}5 \cdot (-3)^{7-1} = 364{,}5$

2.70 Uttrycket $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 3 \cdot 2^9$ är en geometrisk summa.

a) Hur många termer finns i summan?

b) Beräkna summans värde.

Facit:

a) 10 st

b) $s_{10} = \dfrac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} = \dfrac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3069$

2.71 Talen $x-6$, x och $x+18$ är tre på varandra följande element i en viss geometrisk talföljd. Bestäm vilka tal det är.

Facit: I en geometrisk talföljd är kvoten mellan två på varandra följande element konstant. Vi måste alltså ha $x/(x-6) = (x+18)/x$. Genom att lösa för x får vi $x = 9$, så talen är 3, 9 och 27.

Induktionsbevis

2.72 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n^2 + n$$

Facit: Induktion över n. Vi visar först att ekvationen gäller då $n = 1$ (basfall). Vi tar alltså ekvationen, substituerar värdet 1 för variabeln n och verifierar att vi då får samma värde på båda sidorna:

$$\text{VL:} \quad \sum_{i=1}^{1} 2i = 1^2 \cdot 1 = 2 \qquad \text{HL:} \quad 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Nu antar vi att påståendet gäller för ett godtyckligt värde $k \geq 1$ och visar att det då också gäller för värdet $k+1$ (induktionssteg). Vårt induktionsantagande får vi alltså genom att ta ekvationen och substituera värdet k för n. Det påstående som vi måste bevisa får vi på liknande sätt genom att substituera $k + 1$ för n. Explicit:

- Induktionsantagande (IA): $\sum_{i=1}^{k} 2i = k^2 + k$
- Att visa: $\sum_{i=1}^{k+1} 2i = (k+1)^2 + (k+1)$

Hittills har vi bara substituerat variabler, inte räknat någonting. Nu verifierar vi att båda sidor av den ekvation som vi måste bevisa ger samma värde. I detta bevis får vi använda vårt induktionsantagande (IA).

$$\text{VL:} \quad \sum_{i=1}^{k+1} 2i = \left(\sum_{i=1}^{k} 2i \right) + 2(k+1) \overset{\text{IA}}{=} (k^2 + k) + 2(k+1) = k^2 + 3k + 2$$

$$\text{HL:} \quad (k+1)^2 + (k+1) = (k^2 + 2k + 1^2) + (k+1) = k^2 + 3k + 2$$

Eftersom VL = HL kan vi konstatera att påståendet gäller i induktionssteget och därmed för alla naturliga tal $n \geq 1$.

2.73 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$$

Facit: Induktion över n. Vi visar först att påståendet gäller då $n = 1$ (basfall):

$$\text{VL:} \quad \sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \qquad \text{HL:} \quad 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Nu antar vi att påståendet gäller för ett godtyckligt värde $k \geq 1$ och visar att det då också gäller för värdet $k + 1$ (induktionssteg). Genom att substituera $k + 1$ för n och använda induktionsantagandet (IA) får vi

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} \right) + 2^{k+1-1} \overset{\text{IA}}{=} 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

vilket är vad vi ville bevisa.

2.74 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

Facit: Induktion över n. Basfall $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} F_i^2 = F_1^2 = 1^2 = 1 \qquad F_1 F_{1+1} = F_1 F_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Vi antar att ekvationen gäller för $k \geq 1$ och visar att den även gäller för $k + 1$.

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} F_i^2 \right) + F_{k+1}^2 \overset{\text{IA}}{=} F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot (F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$$

Här använde vi Fibonacci-talens definition ($F_n = F_{n-1} F_{n-2}$) i sista steget.

2.75 Låt a_n vara det n:te udda naturliga talet.

a) Hur kan talet a_n skrivas med hjälp av n?

b) Konstruera en formel för att beräkna den aritmetiska summan $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

c) Visa med hjälp av induktion att din formel gäller för alla värden på n.

Facit:

a) $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$

b) $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{n(1 + 2n - 1)}{2} = \dfrac{2n^2}{2} = n^2$

c) Induktion över n (skiss). Basfall $n = 1$. Då gäller $s_1 = 1$ och $1^2 = 1$. För induktionssteget antar vi att påståendet gäller för ett godtyckligt index $k \geq 1$ och visar att det även gäller för $k + 1$:

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} \overset{\text{IA}}{=} k^2 + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

2.76 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

2.77 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} (4k + 3) = (n+1)(2n+3)$$

2.78 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n}(5k+1) = \frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$

Nivå B

2.79 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} k^i = \frac{k^n - 1}{k-1} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

2.80 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

2.81 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

2.82 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

2.83 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2.84 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$3^n \geq 1 + 2n$$

Facit: Bevis med induktion över n. Basfall $n = 0$:

$$\mathrm{VL} = 3^0 = 1 \qquad \mathrm{HL} = 1 + 2n = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \qquad \mathrm{VL} \geq \mathrm{HL}$$

Vi antar att ekvationen gäller för $k \geq 0$ och visar att den även gäller för $k+1$.

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \overset{\text{IA}}{\geq} 3 \cdot (1 + 2k) = 6k + 3 \overset{*}{\geq} 2k + 3$$

I det sista steget använde vi faktumet att $6k + 3 \geq 2k + 3$ när $k \geq 0$.

2.85 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 3$:

$$3^n \geq n^3$$

2.86 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \quad \leq \quad n^2$$

2.87 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \leq \quad n^3$$

2.88 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \leq \quad 2 - \frac{1}{n}$$

2.89 Visa att följande gäller för nästan alla naturliga tal n:

$$n! > 2^n$$

Vad betyder ”nästan alla” i det här sammanhanget?

Facit: Påståendet gäller endast för $n \geq 4$ då $3! = 6 \not> 2^3 = 8$. Basfall $n = 4$:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Nu antar vi att olikheten gäller för $k \geq 4$ och visar att den även gäller för $k+1$.

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) \overset{\text{IA}}{>} 2^k \cdot (k+1) > 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$$