Uppgifter 1: Logik och mängder

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Logik

Nivå A

1.51 Ange symbolerna och sanningsvärdestabellerna för negation, konjunktion, disjunktion, implikation och ekvivalens.

1.52 För att reducera antalet parenteser i en sats kan man införa prioriteringsregler för de logiska konnektiven:

1. negation (högst prioritet)
2. konjunktion
3. disjunktion
4. implikation
5. ekvivalens (lägst prioritet)

Använd dessa regler för att skriva följande med så få parenteser som möjligt:

a) $(p \wedge q) \vee r$

b) $p \to (p \vee q)$

c) $(p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg q) \wedge r)$

d) $\neg(((\neg p) \wedge q) \wedge r) \to ((s \vee (\neg t)) \leftrightarrow \neg((\neg u) \vee ((\neg v) \vee x)))$

1.53 Ställ upp sanningsvärdestabeller för följande satser och avgör därigenom om uttrycken är logiskt ekvivalenta.

a) $p \to q$ $\qquad$ $\neg p \vee q$

b) $p \to q \vee r$ $\qquad$ $\neg q \to \neg p \vee r$

c) $p \wedge (q \vee r)$ $\qquad$ $(p \wedge q) \vee r$

d) $\neg p \wedge \neg q$ $\qquad$ $\neg(p \vee q)$

e) $p \wedge q \to r$ $\qquad$ $\neg r \to \neg p \vee \neg q$

f) $(p \to q) \to r$ $\qquad$ $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

g) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$ $\qquad$ $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

1.54 Avgör om följande uttryck är tautologier eller kontradiktioner.

a) $p \wedge \neg p$

b) $p \vee \neg p$

c) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

d) $((p \to q) \wedge p) \to q$

e) $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (\neg q)$

f) $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$

g) $((p \wedge q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$

h) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

1.55 Vid ett färdighetstest utformat av psykologen Peter Wason ges du följande information: Framför dig på ett bord ligger fyra kort, som på ena sidan har antingen ett x eller ett y och på den andra sidan har antingen ett a eller ett b. Du ska kontrollera om alla korten dessutom uppfyller följande regel: ”Om kortet på ena sidan har ett x så måste det på andra sidan ha ett a.” Frågan som ställs är vilka kort du måste vända på för att kontrollera att regeln är uppfylld av alla kort. Korten avbildas nedan. (Uppgiften är tagen från Johansson och Öhman, 2017.)

$$\boxed{y} \qquad \boxed{x} \qquad \boxed{a} \qquad \boxed{b}$$

1.56 Konjunktion, disjunktion, implikation och ekvivalens är tre exempel på binära logiska operatorer. Hur många olika binära logiska operatorer finns det totalt? Två operatorer betraktas som identiska om de beskrivs genom samma sanningsvärdestabell.

1.57 Formulera det negerade påståendet:

a) Alla studenter kan läsa.

b) Ingen student klarar tentan.

c) Alla tal i mängden M är större än 10.

d) Det finns minst ett negativt tal i mängden M.

Nivå B

1.58 Disjunktionen $p \vee q$ är sann om *minst en* av satserna p och q är sann; annars är den falsk. Satsen $p \oplus q$ ska vara sann om *exakt en* av satserna p och q är sann; annars ska den vara falsk. (Operatorn $\oplus$ kallas ”exklusivt eller”, eng. *exclusive or*, *xor*.)

a) Skriv ner sanningsvärdestabellen för $\oplus$.

b) Ange en sats som är logiskt ekvivalent till satsen $p \oplus q$ men innehåller endast negation, konjunktion och disjunktion.

$$
\begin{aligned}
p \wedge (q \wedge r) &= (p \wedge q) \wedge r & p \vee (q \vee r) &= (p \vee q) \vee r & \text{(W1)}\\
p \wedge q &= q \wedge p & p \vee q &= q \vee p & \text{(W2)}\\
p \wedge (p \vee q) &= p & p \vee (p \wedge q) &= p & \text{(W3)}\\
p \wedge 1 &= p & p \vee 0 &= p & \text{(W4)}\\
p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r) & \text{(W5)}\\
p \wedge \neg p &= 0 & p \vee \neg p &= 1 & \text{(W6)}\\
p \wedge 0 &= 0 & p \vee 1 &= 1 & \text{(W7)}
\end{aligned}
$$

Figur 1: Whiteheads axiom (1898).

$$
\begin{aligned}
p \wedge 1 &= p & p \vee 0 &= p & \text{(H1)}\\
p \wedge q &= q \wedge p & p \vee q &= q \vee p & \text{(H2)}\\
p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r) & \text{(H3)}\\
p \wedge \neg p &= 0 & p \vee \neg p &= 1 & \text{(H4)}
\end{aligned}
$$

Figur 2: Huntingtons axiom (1904).

1.59 En samling logiska operatorer kallas *funktionellt fullständig* om varje sanningstabell kan uttryckas genom att kombinera operatorer från samlingen i ett logiskt uttryck. En välkänd uppsättning logiska operatorer som är funktionellt fullständig är $\{\neg, \wedge\}$, som består av negation och konjunktion. Visa att följande uppsättningar av operatorer är funktionellt fullständiga:

a) $\{\uparrow\}$, där $\uparrow$ betecknar NAND, negationen av konjunktionen

b) $\{\downarrow\}$, där $\downarrow$ betecknar NOR, negationen av disjunktionen

1.60 När man räknar med tal finns en stor mängd räkneregler som man använder för att skriva om uttryck till den form som passar bäst i sammanhanget. Motsvarande räkneregler finns även för satslogik. En uppsättning sådana regler visas i figur 1; den gavs av Alfred North Whitehead (1861–1947) år 1889. En annan regeluppsättning gavs av Edward Huntington (1874–1952) år 1904; den visas i figur 2. När en logiker ser en uppsättning regler såsom den i figur 1 kan hen fråga sig: ”Behöver man verkligen alla dessa regler, eller finns det kanske några regler som man kan härleda ur andra regler i uppsättningen?” Visa att varje regel i Whiteheads uppsättning kan härledas med hjälp av reglerna i Huntingtons uppsättning.

Mängder

Nivå A

1.61 Givet mängden $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska.

a) $6 \in A$ b) $4{,}6 \in A$ c) $8 \notin A$

1.62 Skriv följande mängder genom att räkna upp deras element:

a) $A = \{\, n \mid n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 12 \,\}$

b) $B = \{\, n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ är ett jämnt tal}, n < 8 \,\}$

c) $C = \{\, n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ är en delare till } 86 \,\}$

1.63 Skriv följande mängder med hjälp av mängdbyggare:

a) A är mängden av alla jämna naturliga tal mellan 13 och 29.

b) B är mängden av alla heltalskvadrater mellan 2 och 85.

c) C är mängden av alla triangeltal mellan 3 och 30.

1.64 Ersätt symbolen $\bigcirc$ med antingen $\in$ eller $\notin$ så att påståendena blir sanna:

a) $6 \bigcirc \{2, 4, 6, 8\}$

b) $1 \bigcirc \{\, n \mid n \text{ är ett primtal} \,\}$

c) $5050 \bigcirc \{\, n \mid n \text{ är ett triangeltal} \,\}$

d) $8 \bigcirc \{\, n \mid n \text{ är ett reellt tal} \,\}$

1.65 Följande bokstäver används för att beteckna fem stycken standardmängder: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Vilka mängder står dessa symboler för? Beskriv deras relation till varandra med hjälp av delmängdsrelationen.

1.66 Vad är potensmängden till mängden $\{0, 1, 2\}$?

1.67 Om en mängd A har n element, hur många element har då A:s potensmängd?

1.68 Förklara varför $A = B$ implicerar att $A \subseteq B$.

1.69 Varför är den tomma mängden delmängd till alla mängder?

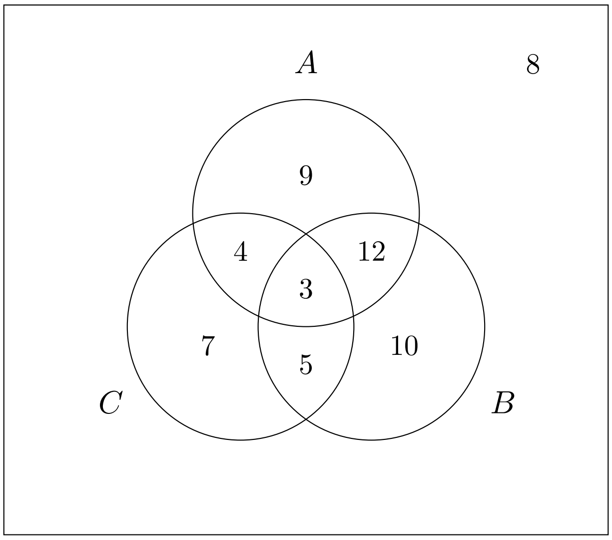
1.70 Förklara skillnaden mellan påståendena $\emptyset \subseteq A$ och $\emptyset \in A$.

1.71 Det vanligaste sättet att visa en likhet $A = B$ är att dela upp beviset och visa

$$\text{(i) } A \subseteq B \qquad \text{och} \qquad \text{(ii) } B \subseteq A$$

Förklara varför detta bevis fungerar.

1.72 Låt $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ och $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Bestäm



Figur 3: Bild till uppgift 1.74

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \backslash B$

1.73 För mängderna A, B och C gäller att

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad B = \{2, 4, 6\} \qquad C = \{1, 3, 5\}$$

Ange om följande påståenden är sanna eller falska.

a) $B \subseteq A$

b) $A = B \cup C$

c) $B \cap C = \emptyset$

d) $B \backslash A = C$

1.74 Talen i figur 3 anger antalet element i vardera sektor av venndiagrammet. Bestäm antalet element i

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cap (B \cup C)$

d) A^{c}

1.75 Man kan visa att $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Förklara varför termen $|A \cap B|$ måste subtraheras.

1.76 Ange två oändliga mängder vars snitt är den tomma mängden.

1.77 Precis som för operationer som addition och multiplikation finns det räkneregler för mängdoperationer. Ett exempel är *distributivitetslagen*:

$$A \cup (B \cap C) \;=\; (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Hur kan vi bevisa detta?