Uppgifter 1: Logik och mängder

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Logik

Nivå A

1.51 Ange symbolerna och sanningsvärdestabellerna för negation, konjunktion, disjunktion, implikation och ekvivalens.

Facit: Samtliga symboler och sanningsvärdestabellerna för de binära operatorerna finns i föreläsningsanteckningarna. Sanningsvärdestabellen för negation är:

p	$\neg p$
0	1
1	0

1.52 För att reducera antalet parenteser i en sats kan man införa prioriteringsregler för de logiska konnektiven:

1 negation (högst prioritet)

2 konjunktion

3 disjunktion

4 implikation

5 ekvivalens (lägst prioritet)

Använd dessa regler för att skriva följande med så få parenteser som möjligt:

a) $(p \land q) \lor r$

b) $p \to (p \lor q)$

c) $(p \lor (\neg q)) \land ((\neg q) \land r)$

d) $\neg(((\neg p) \land q) \land r) \to ((s \lor (\neg t)) \leftrightarrow \neg((\neg u) \lor ((\neg v) \lor x)))$

Facit:

a) $p \land q \lor r$

b) $p \to p \lor q$

c) $(p \lor \neg q) \land \neg q \land r$

d) $\neg(\neg p \land q \land r) \to (s \lor \neg t \leftrightarrow \neg(\neg u \lor \neg v \lor x))$

1.53 Ställ upp sanningsvärdestabeller för följande satser och avgör därigenom om uttrycken är logiskt ekvivalenta.

a) $p \to q$ $\qquad$ $\neg p \vee q$

b) $p \to q \vee r$ $\qquad$ $\neg q \to \neg p \vee r$

c) $p \wedge (q \vee r)$ $\qquad$ $(p \wedge q) \vee r$

d) $\neg p \wedge \neg q$ $\qquad$ $\neg(p \vee q)$

e) $p \wedge q \to r$ $\qquad$ $\neg r \to \neg p \vee \neg q$

f) $(p \to q) \to r$ $\qquad$ $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

g) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$ $\qquad$ $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

Facit:

a) ekvivalenta

b) ekvivalenta

c) inte ekvivalenta

d) ekvivalenta (de Morgans lag)

e) ekvivalenta

f) ekvivalenta

g) ekvivalenta

1.54 Avgör om följande uttryck är tautologier eller kontradiktioner.

a) $p \wedge \neg p$

b) $p \vee \neg p$

c) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

d) $((p \to q) \wedge p) \to q$

e) $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (\neg q)$

f) $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$

g) $((p \wedge q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$

h) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

Facit:

a) kontradiktion

b) tautologi

c) tautologi

d) tautologi (modus ponens)

e) kontradiktion

f) tautologi (modus tollens)

g) tautologi

h) tautologi (disjunktiv syllogism)

1.55 Vid ett färdighetstest utformat av psykologen Peter Wason ges du följande information: Framför dig på ett bord ligger fyra kort, som på ena sidan har antingen ett x eller ett y och på den andra sidan har antingen ett a eller ett b. Du ska kontrollera om alla korten dessutom uppfyller följande regel: ”Om kortet på ena sidan har ett x så måste det på andra sidan ha ett a.” Frågan som ställs är vilka kort du måste vända på för att kontrollera att regeln är uppfylld av alla kort. Korten avbildas nedan. (Uppgiften är tagen från Johansson och Öhman, 2017.)

$$\boxed{y} \qquad \boxed{x} \qquad \boxed{a} \qquad \boxed{b}$$

Facit: Man måste vända på kortet x för att kontrollera att den andra sidan visar ett a, och på kortet b för att kontrollera att den andra sidan *inte* visar ett x.

1.56 Konjunktion, disjunktion, implikation och ekvivalens är tre exempel på binära logiska operatorer. Hur många olika binära logiska operatorer finns det totalt? Två operatorer betraktas som identiska om de beskrivs genom samma sanningsvärdestabell.

Facit: Varje sanningsvärdestabell som beskriver en binär logisk operator har fyra rader och tre kolumner. De första två kolumnerna ger värdena för de två satsvariablerna och den sista kolumnen ger utvärdet. Det finns $2^4 = 16$ sätt att skriva in sanningsvärden i denna kolumn. Det totala antalet binära logiska operatorer är därmed 16.

1.57 Formulera det negerade påståendet:

a) Alla studenter kan läsa.

b) Ingen student klarar tentan.

c) Alla tal i mängden M är större än 10.

d) Det finns minst ett negativt tal i mängden M.

Facit:

a) Det finns minst en student som inte kan läsa.

b) Minst en student klarar tentan.

c) Det finns minst ett tal i mängden M som är mindre eller lika med 10.

d) Alla tal i mängden M är positiva eller noll.

Nivå B

1.58 Disjunktionen $p \vee q$ är sann om *minst en* av satserna p och q är sann; annars är den falsk. Satsen $p \oplus q$ ska vara sann om *exakt en* av satserna p och q är sann; annars ska den vara falsk. (Operatorn $\oplus$ kallas ”exklusivt eller”, eng. *exclusive or*, *xor*.)

a) Skriv ner sanningsvärdestabellen för $\oplus$.

b) Ange en sats som är logiskt ekvivalent till satsen $p \oplus q$ men innehåller endast negation, konjunktion och disjunktion.

Facit:

a) Sanningsvärdestabellen för $p \oplus q$:

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

b) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

$$
\begin{aligned}
p \wedge (q \wedge r) &= (p \wedge q) \wedge r & p \vee (q \vee r) &= (p \vee q) \vee r && \text{(W1)} \\
p \wedge q &= q \wedge p & p \vee q &= q \vee p && \text{(W2)} \\
p \wedge (p \vee q) &= p & p \vee (p \wedge q) &= p && \text{(W3)} \\
p \wedge 1 &= p & p \vee 0 &= p && \text{(W4)} \\
p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r) && \text{(W5)} \\
p \wedge \neg p &= 0 & p \vee \neg p &= 1 && \text{(W6)} \\
p \wedge 0 &= 0 & p \vee 1 &= 1 && \text{(W7)}
\end{aligned}
$$

Figur 1: Whiteheads axiom (1898).

1.59 En samling logiska operatorer kallas *funktionellt fullständig* om varje sanningstabell kan uttryckas genom att kombinera operatorer från samlingen i ett logiskt uttryck. En välkänd uppsättning logiska operatorer som är funktionellt fullständig är $\{\neg, \wedge\}$, som består av negation och konjunktion. Visa att följande uppsättningar av operatorer är funktionellt fullständiga:

a) $\{\uparrow\}$, där $\uparrow$ betecknar NAND, negationen av konjunktionen

b) $\{\downarrow\}$, där $\downarrow$ betecknar NOR, negationen av disjunktionen

Facit:

a) Vi visar att negation och konjunktion kan uttryckas med hjälp av $\uparrow$ (vilket kan bekräftas genom sanningsvärdestabeller):

$$
\begin{aligned}
\neg p &= p \uparrow p \\
p \wedge q &= (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)
\end{aligned}
$$

b) Vi börjar med att visa att $\{\neg, \vee\}$ är funktionellt fullständig genom att uttrycka konjunktion med hjälp av negation och disjunktion:

$$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$$

Vi visar nu att negation och disjunktion kan uttryckas med hjälp av $\downarrow$:

$$
\begin{aligned}
\neg p &= p \downarrow p \\
p \vee q &= (p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge 1 &= p & p \vee 0 &= p & \text{(H1)}\\
p \wedge q &= q \wedge p & p \vee q &= q \vee p & \text{(H2)}\\
p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r) & \text{(H3)}\\
p \wedge \neg p &= 0 & p \vee \neg p &= 1 & \text{(H4)}
\end{aligned}
$$

Figur 2: Huntingtons axiom (1904).

1.60 När man räknar med tal finns en stor mängd räkneregler som man använder för att skriva om uttryck till den form som passar bäst i sammanhanget. Motsvarande räkneregler finns även för satslogik. En uppsättning sådana regler visas i figur 1; den gavs av Alfred North Whitehead (1861–1947) år 1889. En annan regeluppsättning gavs av Edward Huntington (1874–1952) år 1904; den visas i figur 2. När en logiker ser en uppsättning regler såsom den i figur 1 kan hen fråga sig: ”Behöver man verkligen alla dessa regler, eller finns det kanske några regler som man kan härleda ur andra regler i uppsättningen?” Visa att varje regel i Whiteheads uppsättning kan härledas med hjälp av reglerna i Huntingtons uppsättning.

Facit: Regel W2 är samma som regel H2, W4 samma som H1, W5 samma som H3, och W6 samma som H4. Det räcker alltså att härleda reglerna W1, W3 och W7. Vi börja med att härleda W1:

$$
\begin{aligned}
p \wedge (q \wedge r) &= (p \vee 0) \wedge (q \wedge r) && \text{(med H1)}\\
&= (q \wedge r) \wedge (p \vee 0) && \text{(med H2)}\\
&= ((q \wedge r) \wedge p) \vee ((q \wedge r) \wedge 0) && \text{(med H3)}\\
&= (0 \wedge p) \vee (0 \wedge 0) &&\\
&= (p \wedge q) \wedge (r \vee 1) &&\\
&= (p \wedge q) \wedge r && \text{(med H)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge 0 &= (p \vee 0) \wedge 0 && \text{(med H4)}\\
&= 0 \wedge (p \vee 0) &&\\
&= (0 \wedge p) \vee (0 \wedge 0) &&\\
&= a &&
\end{aligned}
$$

Mängder

Nivå A

1.61 Givet mängden $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska.

a) $6 \in A$ b) $4{,}6 \in A$ c) $8 \notin A$

Facit:

a) sant b) falskt c) falskt

1.62 Skriv följande mängder genom att räkna upp deras element:

a) $A = \{\, n \mid n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 12 \,\}$

b) $B = \{\, n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ är ett jämnt tal}, n < 8 \,\}$

c) $C = \{\, n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ är en delare till } 86 \,\}$

Facit:

a) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $B = \{0, 2, 4, 6\}$

c) $C = \{1, 2, 43, 86\}$

1.63 Skriv följande mängder med hjälp av mängdbyggare:

a) A är mängden av alla jämna naturliga tal mellan 13 och 29.

b) B är mängden av alla heltalskvadrater mellan 2 och 85.

c) C är mängden av alla triangeltal mellan 3 och 30.

Facit:

a) $A = \{\, n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ är jämnt}, 13 < n < 29 \,\}$

b) $B = \{\, n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, 2 < n^2 < 85 \,\}$

c) $C = \{\, n \mid n \text{ är ett triangeltal}, 3 < n < 30 \,\}$

1.64 Ersätt symbolen $\bigcirc$ med antingen $\in$ eller $\notin$ så att påståendena blir sanna:

a) $6 \bigcirc \{2, 4, 6, 8\}$

b) $1 \bigcirc \{\, n \mid n \text{ är ett primtal} \,\}$

c) $5050 \bigcirc \{\, n \mid n \text{ är ett triangeltal} \,\}$

d) $8 \bigcirc \{\, n \mid n \text{ är ett reellt tal} \,\}$

Facit:

a) $6 \in \{2, 4, 6, 8\}$

b) $1 \notin \{\, n \mid n \text{ är ett primtal} \,\}$

c) $5050 \in \{\, n \mid n \text{ är ett triangeltal} \,\}$

d) $8 \in \{\, n \mid n \text{ är ett reellt tal} \,\}$

1.65 Följande bokstäver används för att beteckna fem stycken standardmängder: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Vilka mängder står dessa symboler för? Beskriv deras relation till varandra med hjälp av delmängdsrelationen.

Facit: Symbolerna står för mängderna av alla naturliga tal ($\mathbb{N}$, exempel: 5), heltal ($\mathbb{Z}$, exempel: -5), rationella tal ($\mathbb{Q}$, exempel: $\frac{1}{5}$), reella tal ($\mathbb{R}$, exempel: $\sqrt{5}$) och komplexa tal ($\mathbb{C}$, exempel: $7+3i$). Deras relationer till varandra är:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

1.66 Vad är potensmängden till mängden $\{0, 1, 2\}$?

Facit: Potensmängden till $\{0, 1, 2\}$ är mängden av alla delmängder till $\{0, 1, 2\}$, så

$$\mathcal{P}(\{0,1,2\}) \;=\; \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$$

1.67 Om en mängd A har n element, hur många element har då A:s potensmängd?

Facit: Potensmängden till A består av alla delmängder till A. Varje delmängd $B \subseteq A$ kan entydigt beskrivas genom att för varje element $a \in A$ ställa frågan: Är $a \in B$, ja eller nej? På denna fråga finns det två svar, så om $|A| = n$ så finns det sammanlagt

$$\underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ gånger}} \;=\; \prod_{i=1}^{n} 2 \;=\; 2^n$$

olika möjligheter att svara. Detta visar att $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

1.68 Förklara varför $A = B$ implicerar att $A \subseteq B$.

Facit: Om $A = B$ innehåller A och B samma element. Då gäller $a \in B$ för alla element $a \in A$, vilket är kravet i definitionen av delmängdsrelationen.

1.69 Varför är den tomma mängden delmängd till alla mängder?

Facit: För att visa $\emptyset \subseteq A$ måste vi visa att varje element i $\emptyset$ är ett element i A. Men den tomma mängden innehåller ju inga element, så påståendet gäller på ett trivialt sätt. (Ett liknande påstående är: ”Varje Hollywood-film som jag någonsin har medverkat i har fått en Oscar.”)

1.70 Förklara skillnaden mellan påståendena $\emptyset \subseteq A$ och $\emptyset \in A$.

Facit: Påståendet $\emptyset \subseteq A$ säger att den tomma mängden är en delmängd till mängden A. Detta påståendet är sant för godtyckliga mängder A (som vi har bevisat i 1.69). Påståendet ”$\emptyset \in A$” säger att den tomma mängden är ett av elementen i A. Detta gäller inte för godtyckliga mängder. En mängd som det gäller för är $\{\emptyset\}$.

1.71 Det vanligaste sättet att visa en likhet $A = B$ är att dela upp beviset och visa

$$\text{(i) } A \subseteq B \qquad \text{och} \qquad \text{(ii) } B \subseteq A$$

Förklara varför detta bevis fungerar.

Facit: Om $A \subseteq B$ så är alla element i A även element i B; om $B \subseteq A$ så är alla element i B även element i A. Då följer att $A = B$ genom extensionalitetsprincipen.

1.72 Säg att $A \subset B$. Gäller då även $A \subseteq B$?

Facit: Ja. Om $A \subset B$ så uppfyller A kraven på en delmängd till B. (Varje element i A är ett element i B.)

1.73 Hur visar man att A *inte* är delmängd till B?

Facit: För att visa att A inte är delmängd till B måste vi hitta ett element i A som inte finns med i B.

1.74 Låt $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ och $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Bestäm

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \backslash B$

Facit:

a) $\{1, \dots, 8\}$ b) $\{1\}$ c) $\{2, 4, 6, 8\}$

1.75 För mängderna A, B och C gäller att

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad B = \{2, 4, 6\} \qquad C = \{1, 3, 5\}$$

Ange om följande påståenden är sanna eller falska.

a) $B \subseteq A$

b) $A = B \cup C$

c) $B \cap C = \emptyset$

d) $B \backslash A = C$

Facit:

a) sant

b) sant

c) sant

d) falskt

1.76 Talen i figur 3 anger antalet element i vardera sektor av venndiagrammet. Bestäm antalet element i

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cap (B \cup C)$

d) A^{c}

Facit:

a) $9 + 12 + 3 + 4 + 10 + 5 = 43$

b) $3 + 12 = 15$

c) $12 + 3 + 4 = 19$

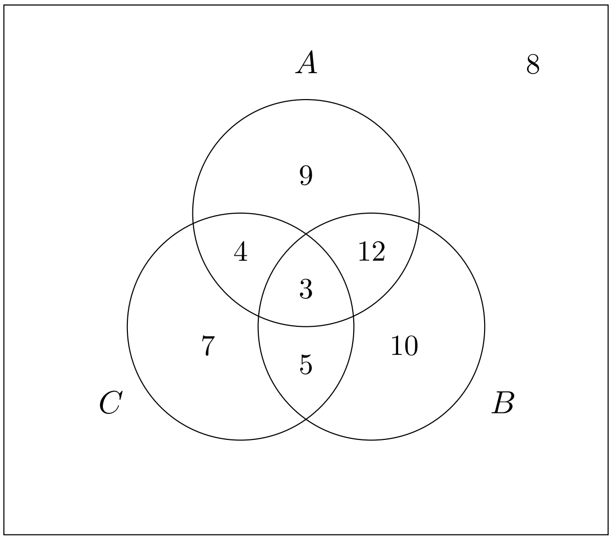
d) $8 + 10 + 5 + 7 = 30$

1.77 Man kan visa att $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Förklara varför termen $|A \cap B|$ måste subtraheras.

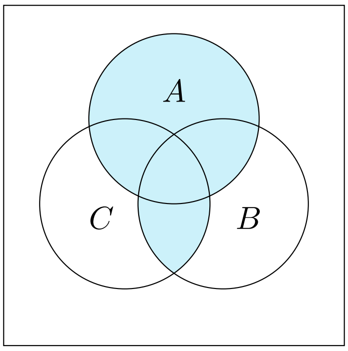
Facit: Utan detta räknas de gemensamma elementen av A och B två gånger, dels som element i A, dels som element i B. De gemensamma elementen är elementen i snittet $A \cap B$. För att få ett korrekt uttryck måste vi alltså subtrahera $|A \cap B|$ många element från $|A| + |B|$.

1.78 Ange två oändliga mängder vars snitt är den tomma mängden.

Facit: $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ är jämnt} \,\}$, $B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ är udda} \,\}$



Figur 3: Bild till uppgift 1.76



Figur 4: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ är skuggad.

1.79 Precis som för operationer som addition och multiplikation finns det räkneregler för mängdoperationer. Ett exempel är *distributivitetslagen*:

$$A \cup (B \cap C) \;=\; (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Hur kan vi bevisa detta?

Facit: Ett sätt är att bevisa ömsesidig inklusion, dvs. att

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad \text{och} \qquad (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

Ett annat sätt är att rita ett venndiagram för de tre mängderna och övertyga sig om att det vänstra uttrycket beskriver samma område i diagrammet som det högra uttrycket (se Figur 4).