Numeriska metoder

Marco Kuhlmann

6.01 Det finns många matematiska problem för vilka man inte kan hitta en exakt lösning, eller där att hitta en sådan lösning vore alltför kostsamt. Ett klassiskt exempel är att beräkna kvadratroten: För de flesta x-värden är $\sqrt{x}$ inget heltal och inte heller ett rationellt tal (ett bråktal). I samband med sådana problem är man intresserade i tekniker för att approximera lösningar. Dessa tekniker kallas **numeriska metoder**.

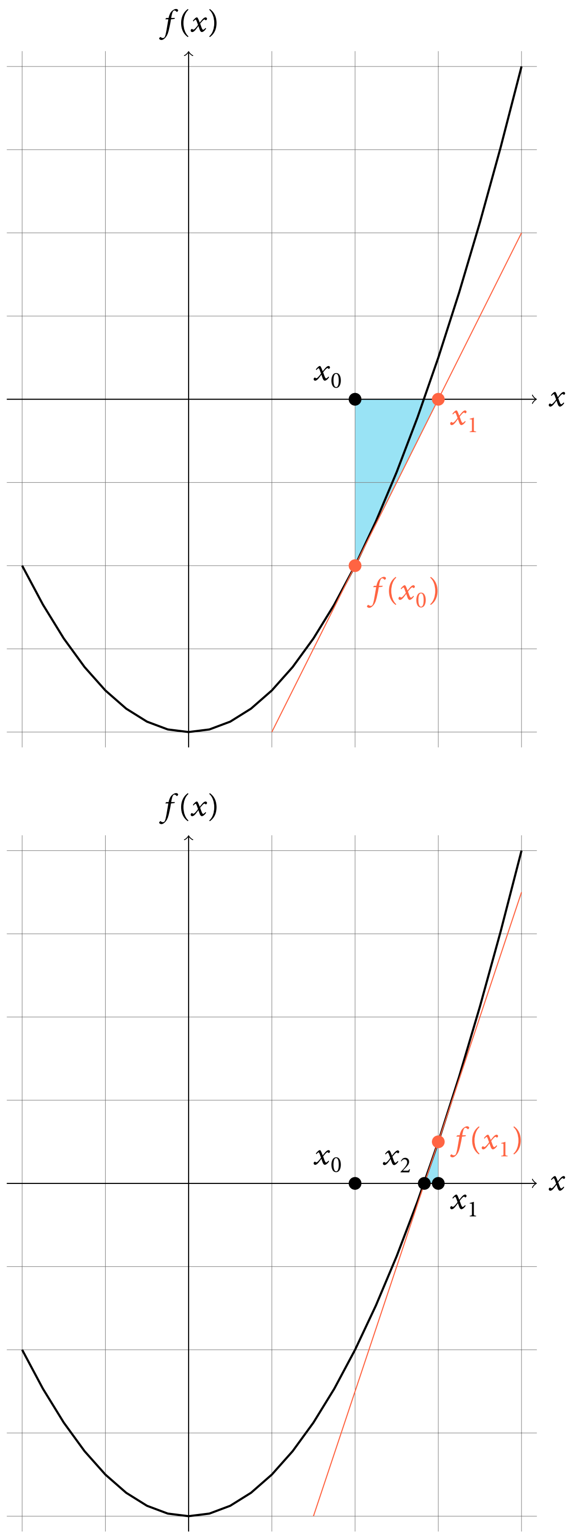
6.02 **Newtons metod** eller **Newton–Raphson-metoden**, efter Isaac Newton (1642–1727) och Joseph Raphson (ca. 1648–1725), är en effektiv metod för att approximera nollställen till en funktion. Det är en iterativ metod där man börjar med att gissa ett startvärde x_0 och sedan beräknar bättre och bättre approximationer $x_1, \ldots, x_n$. Man fortsätter göra detta tills ett värde x_{i+1} inte skiljer sig avsevärt från det föregående värdet x_i, t.ex. tills de överensstämmer på de första tio siffrorna efter kommat.

6.03 Vi börjar med en geometrisk beskrivning av Newtons metod; se figur 1. Som konkret exempel väljer vi funktionen

$$f(x) = x^2 - 2\,. \tag{1}$$

Som startvärde väljer vi $x_0 = 1$. Värdet x_1 ges av den punkt i vilken den tangent för f som nuddar grafen i punkt $(x_0, f(x_0))$ korsar x-axeln. Nu upprepar vi denna konstruktion med x_1 som startvärde för att hitta nästa värde, x_2, och så vidare. I figur 1 ser vi att redan x_2 ligger väldigt nära det faktiska nollstället av funktionen.

6.04 Utifrån den geometriska beskrivningen härleder vi nu en formel som låter oss beräkna en ny approximation x_{i+1} utifrån en tidigare approximation x_i. Som konkret exempel visar vi hur vi kan beräkna x_1 utifrån x_0 i figur 1. Vi vill veta x-koordinaten för den punkt då den tangent till f som nuddar grafen i punkt $(x_0, f(x_0))$ korsar x-axeln. Vi kan tänka oss tangenten som hypotenusan i en rätvinklig triangel vars ena hörn är punkten $(x_0, f(x_0))$ och där detta hörns motkatet är linjen $\overline{(x_0, 0)(x_1, 0)}$; denna triangel visas skuggad i figur 1. Punkten $(x_1, 0)$ når vi från $(x_0, 0)$ genom att börja i punkt $(x_0, f(x_0))$ och följa tangenten för $x_1 - x_0$ enheter. Tangetens lutning är $f'(x_0)$, derivatan av f för värdet x_0; i vårt exempel har vi $f'(x_0) = 2x_0 = 2$. Vi kan



Figur 1: Newtons metod: konstruktion av x_1 (överst) och x_2 (nederst)

sammanfatta allt detta i en formel:

$$f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) = 0 \tag{2}$$

För att räkna ut x_1 löser vi ekvationen:

$$0 = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Med detta får vi $x_1 = 1{,}5$. Nu upprepar vi processen med x_1 som startvärde och räknar ut den nästa approximationen, x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}41\overline{6}\,.$$

6.05 Vi anger den fullständiga algoritmen för Newtons metod. Vi börjar med ett initialt värde x_0. Sedan räknar vi ut nya värden x_{i+1} med hjälp av följande regel:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{3}$$

6.06 Tabellerna visar de första iterationerna av Newtons metod för funktionen $f(x) = x^2 - 2$ med startvärdena $x_0 = 1$ respektive $x_0 = 1{,}5$.

x_0	1
x_1	1,5
x_2	1,4166666666
x_3	1,4142156862
x_4	1,4142135623
x_5	1,4142135623

x_0	1,5
x_1	1,4166666666
x_2	1,4142156862
x_3	1,4142135623
x_4	1,4142135623
x_5	1,4142135623

6.07 Om x_0 är ett faktiskt nollstället för f får vi $f(x_0) = 0$ och nämnaren i bråket i ekvation (3) blir noll. Detta innebär att $x_1 = x_0$. När Newtons metod hittat ett äkta nollställe kommer den alltså inte ändra detta värde i nästa approximation.

6.08 Vi kan använda Newton-metoden för att numeriskt approximera $\sqrt{2}$. För att kunna göra detta måste vi först forma om problemet till ett nollställeproblem: Vi måste hitta en funktion f sådan att f har sina nollställen i $\sqrt{2}$, dvs. att $f(\sqrt{2}) = 0$. När vi med hjälp av Newtons metod approximerat ett nollställe till f har vi då även approximerat en lösning för $\sqrt{2}$. Den enklaste funktionen är $f(x) = x^2 - 2$; detta eftersom $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$. Vi vet att $1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$, så ett bra startvärde är 1,5.