Grunder i matematik och logik (2021)

Kombinatorik och sannolikhetslära

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Sannolikhetslära

Detta avsnitt är för det mesta en kompakt sammanfattning av momentet ”sannolikhetslära” som ingår i kurserna Matematik 1b och Matematik 1c på gymnasiet. Avsnittet Betingad sannolikhet innehåller nytt material.

Grundläggande begrepp

4.01 När vi singlar slant eller kastar tärning kan vi inte med säkerhet förutsäga resultatet. Singla slant och kast med tärning är exempel på **slumpförsök**.

4.02 Ett möjligt resultat vid ett slumpförsök kallas **utfall**. När man singlar slant finns det två möjliga utfall: krona och klave. Vid kast med tärning finns det sex möjliga utfall: etta, tvåa, trea, fyra, femma och sexa.

4.03 Mängden av alla möjliga utfall vid ett slumpförsök kallas försökets **utfallsrum** och betecknas med den grekiska bokstaven Ω (omega).

4.04 En **händelse** är en mängd möjliga utfall. Händelsen ”jämnt antal prickar” vid kast med tärning inträffar när man slår en tvåa, fyra eller sexa; händelsen består alltså av tre stycken utfall.

4.05 Mängden Ω, som innehåller alla möjliga utfall vid ett slumpförsök, representerar händelsen som **alltid** inträffar. Den tomma mängden representerar händelsen som **aldrig** inträffar.

4.06 Notationen $P(A)$ betecknar **sannolikheten** (eng. *probability*) för händelsen A. En sannolikhet kan anges i bråkform ($\frac{1}{2}$), decimalform (0,5) eller procentform (50%). Ibland säger vi **chans** eller **risk** istället för sannolikhet, t.ex. ”Risken för att insjukna i bakteriell meningit är 0,003%”. Vi kan också förstå sannolikhet som ett mått på hur mycket vi tror på någonting (se 4.23).

4.07 **Kolmogorov-axiomen.** Sannolikheter lyder under nedanstående regler:

1. För varje händelse A gäller att $P(A)$ är ett reellt tal mellan 0 och 1.
2. För hela utfallsrummet Ω gäller att $P(\Omega) = 1$.
3. För händelser A, B sådana att $A \cap B = \emptyset$ gäller att $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4.08 För två händelser A, B som inte kan inträffa samtidigt ($A \cap B = \emptyset$) men som tillsammans utgör hela utfallsrummet ($A \cup B = \Omega$) gäller att $P(A) + P(B) = 1$. Händelserna **kompletterar** varandra. Händelsen B kallas därför **komplementhändelsen** till händelsen A (och vice versa) och vi skriver $B = A^c$. För komplementhändelser gäller:

$$P(A^c) = 1 - P(A)\,.$$

Likformiga sannolikhetsfördelningar

4.09 När alla utfall av ett slumpförsök har samma sannolikhet, säger man att man har en **likformig sannolikhetsfördelning**. Singla slant och kast med tärning är exempel på slumpförsök med likformig sannolikhetsfördelning.

4.10 När man har en likformig sannolikhetsfördelning (och bara då!) beskrivs sannolikheten för en händelse A av den så kallade **klassiska sannolikhetsmodellen**:

$$P(A) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antalet möjliga utfall}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Vid kast med tärning finns det sex möjliga utfall. Sannolikheten för händelsen ”sexa” (ett gynnsamt utfall) är $\frac{1}{6}$; sannolikheten för ”jämnt antal prickar” (tre gynsamma utfall) är $\frac{1}{2}$.

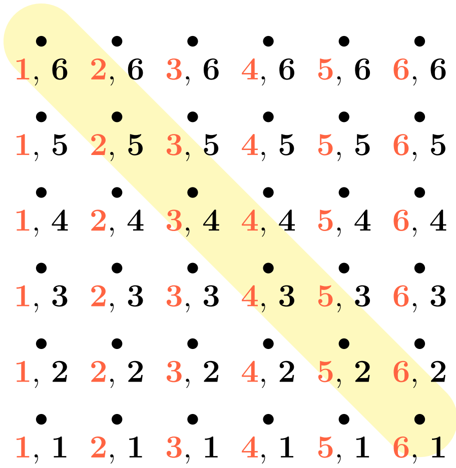
4.11 Sannolikheten för händelsen som alltid inträffar är 1; för denna händelse är antalet gynnsamma utfall samma som antalet möjliga utfall. Sannolikheten för händelsen som aldrig inträffar är 0; för denna händelse är antalet gynnsamma utfall lika med noll.

4.12 Likformiga sannolikhetsfördelningar kan presenteras med **utfallsdiagram** som i figur 1. Detta diagram visar alla möjliga utfall för slumpförsöket ”kast med två tärningar”. Ur diagrammet kan vi läsa av sannolikheten för händelser som t.ex. ”poängsumman lika med 7” ($\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$).

Sannolikhet som relativ frekvens

4.13 Vi gör upprepade kast med en tärning. Vid utvalda tidpunkter räknar vi ut den **relativa frekvensen** av sexor, dvs. kvoten mellan antalet sexor (den absoluta frekvensen) och antalet kast. Resultaten visas i nedanstående tabell. Som vi kan se stabiliserar sig den relativa frekvensen kring den teoretiska sannolikheten för händelsen ”sexa”, $\frac{1}{6}$ (figur 2).

antal kast	n	10	50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000
antal sexor	f	1	8	17	98	179	818	1 688	8 308
relativ frekvens	f/n	0,100	0,160	0,170	0,196	0,179	0,164	0,169	0,166



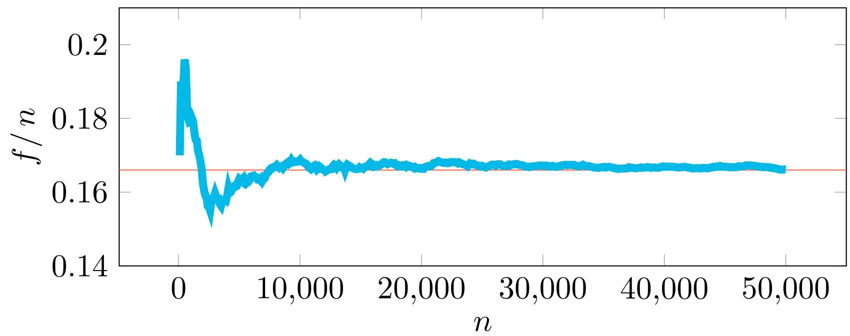
Figur 1: Kast med två tärningar, en **röd** och en **svart**. Utfallet 5, **4** betyder att den röda tärningen visar en femma och den svarta tärningen visar en fyra. Punkterna på diagonalen representerar händelsen ”poängsumman lika med 7”.

4.14 **De stora talens lag.** Den relativa frekvensen för en händelse närmar sig sannolikheten för händelsen när antalet slumpförsök ökar.

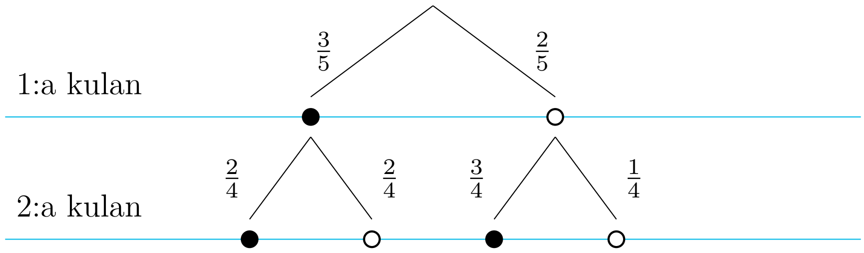
4.15 Det finns många situationer där man inte på förhand kan bestämma sannolikheten för en viss händelse; detta gäller i synnerhet när sannolikhetsfördelningen inte är likformig. I dessa fall kan man använda De stora talens lag och ta den relativa frekvensen för händelsen vid ett stort antal slumpförsök som närmevärde för sannolikheten.

Slumpförsök i flera steg

4.16 När vi kastar tärning två gånger, så är det rimligt att anta att sannolikheten för händelsen ”jämnt antal prickar” vid första kastet inte påverkar sannolikheten för samma händelse vid andra kastet. Vi kan därför betrakta de två händelserna som **oberoende**.



Figur 2: Relativ frekvens (f/n) av sexor vid n kast med tärning. Den relativa frekvensen stabiliserar sig kring den teoretiska sannolikheten $\frac{1}{6}$ (orange linje).



Figur 3: Vi drar två kulor ur en burk som i början innehåller tre svarta kulor och två vita kulor. De fyra grenarna representerar de möjliga utfallen, dvs. ”två svarta kulor”, ”svart kula först, sedan vit kula”, ”vit kula först, sedan svart kula”, ”två vita kulor”.

4.17 **Produktregeln** säger att sannolikheten för att två oberoende händelser A och B ska inträffa är produkten av de enskilda händelsernas sannolikheter:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Produktregeln gäller även för fler än två händelser, under förutsättningen att alla dessa händelser är ömsesidigt oberoende.

4.18 Att två händelser är **beroende** innebär att inträffandet av den ena påverkar sannolikheten för den andra. Exempel: Vi har en påse med fem kulor, tre svarta och två vita. Vi drar två kulor ur påsen. Sannolikheten för vilken färg den andra kulan har beror på vilken färg den första kulan hade. Ett slumpförsök i flera steg som detta kan illustreras som i figur 3.

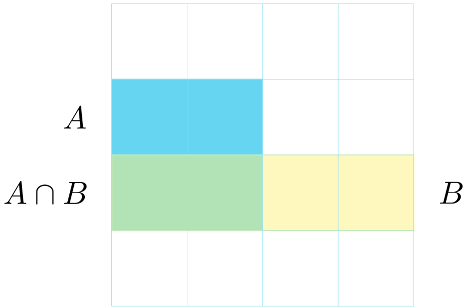
4.19 Diagrammet i figur 3 är ett exempel på ett **träddiagram**. I ett träddiagram representerar varje nivå ett steg i slumpförsöket, och varje gren ett möjligt utfall.

4.20 **Räkneregler för träddiagram**

1. Sannolikheten för en gren (ett utfall) i ett träddiagram är lika med produkten av sannolikheterna längs grenen.
2. Sannolikheten för en händelse är summan av sannolikheterna för de olika grenarna (utfallen) i ett träddiagram som ingår i händelsen.

4.21 **Dragning med återläggning** syftar på slumpförsök i flera steg med oberoende händelser, som t.ex. att dra kulor ur en burk och lägga tillbaka kulorna efter varje dragning, eller att kasta flera tärningar i följd. Sådana slumpförsök kan visualiseras både med utfallsdiagram (figur 1) och med träddiagram (figur 3).

4.22 **Dragning utan återläggning** syftar på slumpförsök i flera steg med beroende händelser, som t.ex. att dra kulor ur en burk utan att lägga tillbaka dem. Sådana slumpförsök kan visualiseras med träddiagram (figur 3).



Figur 4: Betingad sannolikhet

Betingad sannolikhet

4.23 Anna kastar tärning och ser att det är en sexa. Hon berättar för Bertil att tärningen visar ett jämnt tal. Hur stor är den subjektiva sannolikheten för ”tärningen visar en sexa” för Anna och för Bertil? Hur stor är den för Cecilia, som inte vet någonting om Annas tärningskast?

4.24 Enkel sannolikhet är ett mått på hur mycket vi tror på en händelse A. **Betingad sannolikhet** är vårt mått på hur mycket vi tror på A då vi redan har information om en annan händelse B. I träddiagrammet i figur 3 är sannolikheterna för den andra kulan betingade sannolikheter. Den betingade sannolikheten för A givet B tecknas $P(A \mid B)$ och definieras som

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Med avseende på A så kallas den obetingade sannolikheten $P(A)$ **apriorisannolikhet** (eng. *prior probability*) medan den betingade sannolikheten $P(A \mid B)$ kallas **aposteriorisannolikhet** (eng. *posterior probability*).

4.25 Sammanhanget mellan enkel och betingad sannolikhet kan beskrivas med att man i det ursprungliga utfallsrummet ”zoomar in” på en delmängd av utfallen, nämligen dem som är förenliga med B. Dessa händelser blir till det nya utfallsrummet för A. (Se figur 4.)

4.26 Man kan läsa definition 4.24 som en regel för hur vi ska uppdatera vår säkerhet på A när den får informationen B (eng. *belief update*). Notera dock att det inte finns någonting i definitionen som syftar på ett temporalt eller kausalt samband mellan A och B.

4.27 Ett annat sätt att skriva formeln för betingad sannolikhet går under namnet **multiplikationsregeln**. Den finns i två varianter:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) \qquad P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$$

4.28 I en fabrik tillverkas 40% av enheterna vid maskin 1 och 60% vid maskin 2. Maskinerna tillverkar en viss andel defekta enheter; denna andel är 2% för maskin 1 och 5% för maskin 2. Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet är defekt?

Lösning: Vi modellerar problemet som ett slumpförsök i två steg och ritar ett träddiagram. Låt oss beteckna händelsen att en enhet tillverkas vid maskin 1 med A_1 och händelsen att en enhet tillverkas vid maskin 2 med A_2. Låt oss beteckna händelsen att en enhet är defekt med B. Vi vill veta $P(B)$. Med hjälp av räknereglerna för träddiagram och vår nya notation för betingade sannolikheter får vi

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}038$$

Sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet är defekt är alltså 3,8%.

4.29 När man vill bygga en probabilistisk modell för en betingad sannolikhet är det ofta enklare att bygga en modell för den omvänt betingade sannolikheten. Exempel: En läkare vill ställa en diagnos utifrån kända symptom; men det är enklare att säga någonting om vilka diagnoser som har vilka symptom. **Bayes' regel** låter oss konvertera mellan de två modellerna.

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

4.30 Härled Bayes' regel utifrån multiplikationsregeln (4.27).

Lösning: Genom att likställa multiplikationsregelns två sidor får vi:

$$P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

När vi delar på $P(A)$ får vi Bayes' regel.

4.31 Vi fortsätter på 4.28. En kund påträffar en defekt enhet. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 2?

Lösning: Vi är intresserade av sannolikheten $P(A_2 \mid B)$. Enligt Bayes' regel gäller:

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(B \mid A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}60}{0{,}038} \simeq 0{,}789$$

Sannolikheten för att den felaktiga enheten tillverkats vid maskin 2 är alltså ungefär 78,9%.

Kombinatorik

4.32 Kombinatorik är den gren av matematiken som försöker svara på frågor om hur många olika matematiska objekt som finns av en given typ och storlek. Under kursens gång har vi redan stött på flera kombinatoriska problem, t.ex. när vi skulle bestämma hur många delmängder det finns till en given mängd. I den här föreläsningen kommer vi att studera kombinatoriska problem på ett mera systematiskt sätt.

Grundläggande principer

Det finns ett antal viktiga grundprinciper som ofta används i kombinatoriska resonemang. Här presenteras tre av dessa principer:

4.33 **Multiplikationsprincipen.** Om det finns a olika sätt att göra någonting på och b olika sätt att göra någonting annat på, så finns $a \cdot b$ olika sätt att göra båda sakerna. Exempel: Antalet möjligheter att välja en trerättersmeny när det finns 2 olika förrätter, 3 olika huvudrätter och 3 olika efterrätter är $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

4.34 **Additionsprincipen.** Om det finns a olika sätt att göra någonting på och b olika sätt att göra någonting annat på och vi kan inte göra båda sakerna, så finns det $a + b$ olika sätt att välja en av aktionerna. Exempel: Om man ska välja antingen förrätt och huvudrätt eller huvudrätt och efterrätt så finns det $2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 15$ olika möjligheter.

4.35 **Lådprincipen.** Om det finns a objekt som ska fördelas på b lådor och $a > b$, så kommer åtminstone en av lådorna innehålla mer än ett objekt. Exempel: Linköpings kommun har ca. 160 000 invånare. Det finns ca. 100 000 hårstrån på ett mänskligt huvud. Med lådprincipen kan vi dra slutsatsen att det finns åtminstone två människor i Linköping som har exakt lika många hårstrån på huvudet.

Urnmodellen

4.36 **Urnmodellen** är en abstrakt modell som kan hjälpa oss att första flera olika kombinatoriska processer. I urnmodellen har vi en urna (en påse) med n stycken kulor, numrerade från 1 till n. Vi drar k gånger från urnan enligt vissa regler och räknar antalet resultat. Vi skiljer mellan olika typer av ”experiment”:

- Efter varje dragning kan vi antingen lägga tillbaka kulan i urnan eller låta den ligga utanför urnan.

- När vi räknar resultat kan vi antingen vara intresserade i endast vilka kulor vi dragit eller också i vilken ordning vi har dragit dem.

Nu finns det fyra möjliga fall (se figur 5). Vi antar att $n = 5$ och $k = 3$.

1. med återläggning, med ordning: Då kan vi tänka oss resultatet som en vanlig lista, dvs. samma kula kan förekomma mer än en gång och vi skiljer mellan resultaten $[1, 1, 2]$ och $[2, 1, 1]$.

2. utan återläggning, med ordning: Då kan vi tänka oss resultatet som en så kallad enkel lista – samma kula förekommer högst en gång men vi skiljer fortfarande mellan $[1, 2, 3]$ och $[3, 2, 1]$.

	utan återläggning (upprepning)	med återläggning (upprepning)
utan hänsyn taget till ordning	mängd $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	multimängd $\binom{n+k-1}{n-1}$
med hänsyn taget till ordning	enkel lista $\frac{n!}{(n-k)!}$	lista n^k

Figur 5: Urnmodellen. Vi drar k gånger från en urna med n stycken kulor.

3. utan återläggning, utan ordning: Då kan vi tänka oss resultatet som en mängd, dvs. samma kula förekommer högst en gång och vi skiljer inte mellan $\{1, 2, 3\}$ och $\{3, 2, 1\}$.
4. med återläggning, utan ordning: Då kan vi tänka oss resultatet som en så kallad multimängd – samma kula kan förekomma mer än en gång men vi skiljer inte mellan $\langle 1, 1, 2\rangle$ och $\langle 2, 1, 1\rangle$.

Med återläggning, med hänsyn taget till ordning

4.37 Hur många möjliga sifferkombinationer finns det för ett vanligt cykellås med fyra stycken sifferhjul där varje hjul kan visa siffror mellan 0 och 9? Med hjälp av multiplikationsprincipen får vi $10^4 = 10\,000$ möjligheter.

4.38 Den allmänna formeln för antalet möjligheter att dra k kulor från en urna med återläggning och med med hänsyn tagen till ordning är n^k.

Utan återläggning, med hänsyn taget till ordning

4.39 Hur många sätt finns det att placera 5 personer på 5 platser? Den första personen kan välja mellan 5 platser, den andra personen kan välja mellan 4 platser, och så vidare. Med hjälp av multiplikationsprincipen får vi $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ möjligheter.

4.40 En **permutation** är ett sätt att välja ut ett antal element ur en mängd utan återläggning men *med* hänsyn taget till ordning. I det enklaste fallet ordnar man alla element i mängden. Antalet sätt att ordna (permutera) n stycken element ges av n**-fakultet**:

$$n! \;=\; \prod_{i=1}^{n} i \;=\; n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

4.41 Fakultetsfunktionen kan definieras rekursivt:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{för } n \leq 1 \\ n(n-1)! & \text{för } n > 1 \end{cases}$$

4.42 Hur många sätt finns det att placera 5 personer på 3 platser? Vi kan i princip använda samma resonemang som tidigare, men nu tar antalet platser slut efter tre termer, dvs. vi får $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ möjligheter.

4.43 Formeln för $n!$ beskriver fallet då $k = n$ (antalet platser är lika med antalet personer). I det allmänna fallet gäller denna formel för antalet sätt att välja ut k element ur en mängd bestående av n element när vi tar hänsyn till ordning:

$$P(n,k) \;=\; \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ stycken termer}} \;=\; \frac{n!}{(n-k)!}$$

Utan återläggning, utan hänsyn taget till ordning

4.44 I en pizzeria kan man välja mellan 5 olika tillbehör till pizzorna. Hur många pizzor kan man baka med 3 olika tillbehör? Ett sätt att se på denna typ av dragning är att först räkna ut hur många sätt det finns att baka pizzor *med* hänsyn taget till ordning av tillbehören och sedan dela med antalet sätt att permutera tillbehören.

4.45 En **kombination** är ett sätt att välja ut ett antal element ur en mängd utan återläggning och *utan* hänsyn taget till ordning. Antalet sätt att välja (kombinera) k stycken element ur en grundmängd bestående av n stycken element är

$$C(n,k) \;=\; \frac{P(n,k)}{k!} \;=\; \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

4.46 Talet $C(n,k)$ har även en annan notation:

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \text{läs: "}n \text{ över } k\text{"}$$

Uttrycket $\binom{n}{k}$ kallas **binomialkoefficient**. Detta namn kommer ifrån att binomialkoefficienterna är koefficienterna i utvecklingen av potenser av binomet $a+b$:

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Som ett exempel kan man ta $n = 2$, som ger den vanliga kvadratregeln:

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k y^{2-k} = \binom{2}{0} x^0 y^{2-0} + \binom{2}{1} x^1 y^{2-1} + \binom{2}{2} x^2 y^{2-2} = y^2 + 2xy + x^2$$

4.47 Visa att binomialkoefficienterna uppfyller följande likheter:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Den sista likheten kan förklaras med att det finns lika många sätt att välja vilka k element som ska tas ut ur mängden som att välja vilka $n-k$ element som ska vara kvar i mängden.