Rekursion och induktion

Marco Kuhlmann och Victor Lagerkvist

Talföljder och summor

Introduktion

2.01 En **talföljd** är en ändlig eller oändlig uppräkning av tal. De ingående talen kallas för talföljdens **element**. Som exempel kan vi ta följden av alla triangeltal:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$$

Vi kommer att skriva a_i för det i:te elementet i en talföljd. Värdet i kallas elementets **index**. Observera att vi börjar med index 1, inte med index 0 som i Python.

2.02 Ibland kan man uttrycka en talföljd som en **summa** av elementen i en annan talföljd. I detta sammanhang används summatecknet. Triangeltalen t.ex. får man genom att addera de första elementen i följden av alla (strikt positiva) naturliga tal:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} i$$

2.03 Ett annat sätt att beskriva en talföljd är att använda en **sluten formel**. Med en sådan formel kan vi beräkna elementen i talföljden direkt, utan att först beräkna föregaende element. Här är en sluten formel för triangeltalen:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.04 Ett sätt att beskriva en talföljd är att använda en **rekursiv formel**. En sådan formel tillåter oss att beräkna talföljdens element utifrån ett eller flera av de föregående elementen. Här är en rekursiv formel för triangeltalen:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{då } n = 1 \quad \text{(basfall)} \\ a_{n-1} + n & \text{då } n > 1 \quad \text{(rekursivt fall)} \end{cases}$$

2.05 En av de mest kända talföljderna är **Fibonaccis talföljd**, som definieras genom den rekursiva formeln $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ med startvärdena $F_1 = 1$ och $F_2 = 1$. Ibland definierar man ett extra startvärde $F_0 = 0$.

Aritmetiska talföljder och summor

2.06 En talföljd är en **aritmetisk talföljd** om differensen mellan två på varandra följande element är ett konstant tal d. En sådan talföljd kan beskrivas med den slutna formeln

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ett enkelt exempel på en aritmetisk talföljd är följden av alla jämna naturliga tal större än eller lika med 2; i denna talföljd är $a_1 = 2$, $d = 2$ och $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$.

2.07 I en aritmetisk talföljd med 381 element är det första elementet 7 och differensen mellan två på varandra följande element är -2. Beräkna det sista elementet.

Lösning: Vi använder den slutna formeln för aritmetiska talföljder:

$$a_{381} = 7 + (381-1) \cdot (-2) = -753$$

2.08 En **aritmetisk summa** är en summa vars termer är de första elementen i en aritmetisk talföljd. En sådan summa kan beskrivas med den slutna formeln

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Om vi som den underliggande talföljden väljer följden av alla (strikt positiva) naturliga tal ($a_i = i$), så ger oss denna formel den slutna formeln för triangeltalen i 2.03.

2.09 Beräkna summan av de 100 första jämna naturliga tal större än eller lika med 2.

Lösning: Talföljden kan beskrivas med hjälp av den slutna formeln $a_n = 2n$ (se 2.06). Summan av de 100 första talen blir

$$s_{100} = \frac{100 \cdot (2 + 2 \cdot 100)}{2} = \frac{200 + 20000}{2} = 10100$$

Geometriska talföljder och summor

2.10 En talföljd är en **geometrisk talföljd** om kvoten mellan två på varandra följande element är ett konstant tal k. En sådan talföljd kan beskrivas med den slutna formeln

$$a_n = a_1 k^{n-1}$$

Ett enkelt exempel på en geometrisk talföljd är följden av alla potenser av talet 2; i denna talföljd är $k = 2$ och $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

2.11 En **geometrisk summa** är en summa vars termer är de första elementen i en geometrisk talföljd. En sådan summa kan beskrivas med den slutna formeln

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \qquad \text{där } k \neq 1$$

Om vi som den underliggande talföljden väljer följden av alla potenser av talet 2 ($a_i = 2^{i-1}$) så ger oss denna formel den slutna formeln $s_n = 2^n - 1$.

Rekursion

I detta avsnitt tittar vi närmare på rekursion som vi redan sett i 2.04.

2.12 En **rekursiv funktion** är en funktion som anropar sig själv. Ett klassiskt exempel är funktionen som beräknar fakulteten för ett naturligt tal $n \geq 1$:

```
def f(n):
    return 1 if n == 1 else n * f(n-1)
```

Denna funktion skiljer mellan två fall: om $n = 1$ returnerar den värdet 1; om $n > 1$ returnerar den värdet $n \cdot f(n-1)$, där $f(n-1)$ ger fakulteten för talet $n-1$. Ett fall som innehåller ett rekursivt anrop kallas **rekursivt fall**; de övriga fallen kallas **basfall**.

2.13 För att en rekursiv funktion ska vara väldefinierad är det viktigt att alla rekursiva anrop så småningom leder till ett basfall; annars säger man att funktionen **divergerar**. Här är ett exempel på en rekursiv funktion som divergerar:

```
def foo(n):
    return 1 if n == 1 else foo(n-1) + foo(n-2)
```

När man anropar funktionen med argumentet $n = 2$ kommer det rekursiva anropet `foo(n-2)` inte leda till ett basfall. Följande funktion däremot är väldefinierad:

```
def fib(n):
    return 1 if n == 1 or n == 2 else fib(n-1) + fib(n-2)
```

Denna funktion returnerar Fibonacci-talen från 2.05.

2.14 När man skriver en rekursiv funktion för att lösa ett problem (som till exempel att beräkna fakulteten för talet n) bryter man ned problemet i ett eller flera mindre problem (beräkna fakulteten för talet $n-1$); de ”enklaste” problemen (fakulteten för talet 1) svarar mot basfallen. För att denna strategi ska fungera måste man anta att ett rekursivt anrop gör vad det ska.

Induktion

2.15 **Induktion** är en teknik för att visa att ett påstående $P(n)$ är sant för alla naturliga tal $n \in \mathbb{N}$, eller för alla tal större än något minsta tal n_0. Mera allmänt kan man använda induktion för att visa egenskaper hos rekursiva strukturer, som t.ex. rekursiva funktioner eller rekursiva datatyper såsom sökträd.

2.16 Målet med ett induktionsbevis är att bevisa en utsaga på formen

> Påståendet $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbb{N}$ sådana att $n \geq n_0$.

Påståendet $P(n)$ är ett predikat, en påstående vars sanningsvärde beror på värdet för variabeln n. Ett konkret exempel:

> För alla $n \in \mathbb{N}$ sådana att $n \geq 1$ gäller att
>
> $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{$*$}$$

I detta exempel kan vi skriva predikatet som

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

För att testa om utsagan ($*$) är sann utan induktion skulle vi behöva ta predikatet $P(n)$, ersätta variabeln n med vart och ett av dess möjliga värden k (alla naturliga tal k sådana att $k \geq n_0$) och testa om den resulterande utsagan $P(k)$ är sann. Eftersom det finns oändligt många naturliga tal skulle detta ta oändligt lång tid.

Strukturen hos ett induktionsbevis

I detta avsnitt kommer vi gå igenom ett konkret exempel på ett bevis av utsagan ($*$) med hjälp av induktion. Ett fullständigt induktionsbevis har tre rubriker:

2.17 **Bevis:** Här ska du visa att du har förstått vilken variabel det är som kan ta oändligt många värden. Du skriver helt enkelt: ”Induktion över n.”

2.18 **Basfall:** Här ska du visa två saker:

1. Du har identifierat det minsta möjliga värdet för variabeln n. Ovan har jag kallat detta värde för n_0. I många fall är $n_0 = 0$; för ($*$) är $n_0 = 1$.
2. Påståendet gäller för detta värde, dvs. den utsaga som du får genom att ersätta n med värdet n_0 är sann.

Du ska skriva:

> Jag visar att påståendet gäller då $n = n_0$, dvs. att $P(n_0)$.

Istället för $P(n_0)$ ska du skriva ut den konkreta utsagan du får när du tar predikatet $P(n)$ och ersätter induktionsvariabeln med värdet n_0. För utsaga ($*$):

> Jag visar att påståendet gäller då $n = 1$, dvs. att
>
> $$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

2.19 **Induktionssteg:** Här ska du visa att om påståendet gäller för något godtyckligt värde $k \geq n_0$, så gäller det även för värdet $k+1$. Du ska skriva:

> Låt $k \geq n_0$. Jag antar att påståendet gäller då $n = k$, dvs. att $P(k)$. Jag visar att påståendet gäller även då $n = k+1$, dvs. att $P(k+1)$.

Istället för $P(k+1)$ ska du skriva ut den konkreta utsagan du får när du tar predikatet $P(n)$ och ersätter induktionsvariabeln med värdet $k+1$. Konkret för $(*)$:

> Låt $k \geq n_0$. Jag antar att påståendet gäller då $n = k$, dvs. att
>
> $$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$
>
> Jag visar att påståendet gäller även då $n = k+1$, dvs. att
>
> $$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Sedan ska du verifiera att påståendet verkligen gäller för detta värde. I detta steg får du – och behöver i princip alltid – använda induktionsantagandet, dvs. utsagan $P(k)$. Du ska tydligt markera det steg i beräkningen då du använder induktionsantagandet med förkortningen IA.

Exemplariskt bevis

Nedan följer ett fullständigt exemplariskt bevis för utsaga $(*)$. Notera att jag använder "jag"-formen. Jag rekommenderar att du också använder den formen; då blir det lätt för den som granskar uppgiften att förstå hur du tänker och vad du gör i varje steg.

2.20 **Bevis:** Induktion över n.

2.21 **Basfall:** Jag visar att påståendet gäller då $n = 1$, dvs. att

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

Termen till vänster om likhetstecknet är lika med 1. Termen till höger om likhetstecknet är lika med $\frac{2}{2} = 1$. Termerna är alltså lika.

2.22 **Induktionssteg:** Låt $k \geq n_0$. Jag antar att påståendet gäller då $n = k$, dvs. att

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \tag{IA}$$

Nu visar jag att påståendet gäller då $n = k+1$, dvs. att

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Jag förenklar termen till vänster om likhetstecknet:

$$\mathrm{VL} = \sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) \stackrel{\mathrm{IA}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2+k}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

Jag förenklar termen till höger om likhetstecknet:

$$\mathrm{HL} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

Termerna är alltså lika.

Tips i samband med induktionsbevis

2.23 Börja gärna med att kontrollera om påståendet kan stämma för små värden av n. Om du har gjort sådana kontrollräkningar kan du hänvisa till dem i basfallet.

2.24 När du bevisar en likhet, förenkla då de två termerna till vänster och höger om likhetstecknat separat ifrån varandra; skriv inte ekvivalenser som i detta exempel:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

Detta format är dåligt eftersom det är svårt att se vilka regler du använt för att förenkla termerna, bl.a. var du använt induktionsantagandet.

2.25 Ibland kan det bli enklare att anta att påståendet gäller för $n = k-1$ och visa att det då också gäller för $n = k$. Men då måste du välja $k - 1 \geq n_0$.

2.26 Ibland räcker inte den vanliga induktionsprincipen enligt vilken man går från ett naturligt tal ($n = k$) till det nästa ($n = k+1$). Då kan man försöka använda den så kallade starka induktionsprincipen enligt vilken man antar att påståendet gäller för *alla* n sådana att $n \geq n_0$ och $n \leq k$ och visar att det då även gäller för $k+1$.

Sambandet mellan rekursion och induktion

Som vi redan nämnt så finns det ett nära samband mellan rekursion och induktion. Vi illustrerar detta samband med hjälp av ett exempel.

2.27 Schack är ett väldigt gammalt spel. Dess tidigaste föregångare uppstod i Indien på 500-talet, alltså ungefär för 1 500 år sedan. Det finns en legend kopplad till spelet: När spelets uppfinnare visade upp schackspelet till landets härskare blev denne så belåten att han sa åt uppfinnaren att själv välja sin belöning. Uppfinnaren, som var väldigt smart (lite för smart, som det senare skulle visa sig) önskade sig ett riskorn för den första rutan på schackbrädan, och för varje annan ruta på brädan dubbelt så många riskorn som på föregående ruta. Härskaren tyckte att denna önskan lät väldigt modest och beordrade sin kammarherre att räkna ut hur många riskorn det skulle bli totalt och lämna över riset till uppfinnaren.

2.28 Vår uppgift är att göra kammarherrens räkning. Strategin är denna: Vi ska först räkna ut hur många riskorn som ligger på ruta n (för godtyckliga värden av n), och sedan lägga ihop alla dessa värden till en summa.

2.29 Vi börjar med att ge en rekursiv definition för antalet riskorn på ruta n, då $n \geq 1$. Vi betecknar detta värde som $r(n)$.

$$r(n) = \begin{cases} 1 & \text{för } n = 1 \quad \text{(ett riskorn på ruta 1)} \\ 2 \cdot r(n-1) & \text{för } n > 1 \quad \text{(dubbla antalet som på ruta } n-1\text{)} \end{cases}$$

2.30 Vi påstår att $r(n) = 2^{n-1}$ gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$. Vi bevisar detta med induktion över n.

Basfall. Vi måste visa att påståendet är sant för $n = 1$. I det här fallet är det bara att räkna: Genom att använda definitionen för $r(n)$ får vi $r(1) = 1$, och $2^{1-1} = 1$. Båda leden av ekvationen har alltså samma värde.

Induktionssteg. Vi måste bevisa att, om påståendet är sant för något $k \geq n_0$, så är det även sant för $k + 1$. Låt därför $k \geq n_0$ och anta att påståendet är sant för $n = k$, dvs. att

$$r(k) = 2^{k-1} \tag{IA}$$

Vi måste visa att påståendet gäller för $n = k + 1$, dvs. att

$$r(k+1) = 2^{(k+1)-1}$$

Högerledet kan förenklas till 2^k. Vi förenklar vänsterledet:

$$\begin{aligned} \text{VL} = r(k+1) &= 2 \cdot r(k) && \text{(definition av } r(n)\text{)} \\ &= 2 \cdot 2^{k-1} && \text{(IA)} \\ &= 2^k && \text{(potensräkning)} \end{aligned}$$

2.31 I det bevis som vi just gjorde motsvarade basfall och induktionssteg de två fallen i definitionen av den rekursiva funktionen $r(n)$. I den rekursiva funktionen r anropar vi $r(n-1)$ och förlitar oss på att detta anrop ger oss antalet riskorn på ruta $n-1$. I induktionsbevis reducerar vi beviset för $r(n)$ till beviset för $r(n-1)$ och antar att vi redan kunnat bevisa det aktuella påståendet för detta enklare problem.

2.32 Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} r(i) = 2^n - 1$$

Lösning: Induktion över n. Vi visar först att påståendet gäller då $n = 1$ (basfall):

$$\text{VL:} \quad \sum_{i=1}^{1} r(1) = 1 \qquad \text{HL:} \quad 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Nu antar vi att påståendet gäller för ett godtyckligt värde $k \geq 1$ och visar att det då också gäller för värdet $k+1$ (induktionssteg). Genom att substituera $k+1$ för n och använda induktionsantagandet (IA) får vi

$$\sum_{i=1}^{k+1} r(i) = \sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}\right) + 2^{k+1-1} \overset{\text{IA}}{=} 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

vilket är vad vi ville bevisa.

2.33 Antalet riskorn på en schackbräda med 64 rutor är

$$2^{64} - 1 \;=\; 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \;\sim\; 18{,}4 \text{ triljoner}$$

Det går ungefär 48 000 riskorn på ett kilo ris. Man kan då räkna ut att 18,4 triljoner riskorn motsvarar ca. 384,3 gigaton ($384{,}3 \cdot 10^9$ ton) ris. Världsproduktionen ris år 2009 var 678 megaton ($678 \cdot 10^6$ ton). Väldigt grovt kan man alltså säga att antalet ris på en schackbräda skulle vara ungefär 1 000 gånger så mycket som produceras i hela världen på ett år. När kungens kammarherre hade berättat detta för kungen lät denne hugga av uppfinnarens huvud för att sätta stopp för dennes matematiska fräckhet.