

Linköpings Universitet
Institutionen för datavetenskap
Peter Jonsson

TDDA32 Konstruktion och analys av algoritmer

Tentamen fredagen den 14:e januari 2000, kl 8.00–13.00.

Hjälpmedel: Kursboken “Introduction to Algorithms” (Cormen, Leiserson & Rivest).

Poäng: Totalt kan 40 poäng erhållas. För godkänt krävs ca 16 poäng.

Jourhavande lärare: Peter Jonsson, tel 28 24 15.

Allmänt: Skriv läsligt. Onödigt komplicerade lösningar kan leda till poängavdrag. Bristfälligt motiverade lösningar leder ofelbart till poängavdrag.

Uppgifterna i tentamen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Lycka till!

Peter

Uppgift 1. (8p)

Vi börjar med att definiera två grafbegrepp. Låt $G = \langle V, E \rangle$ vara en oriktad graf. Man säger att

1. G är k -färgningsbar ($k \geq 1$) om det existerar en funktion $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ sådan att om det finns en båge mellan v och w (där $v, w \in V$) så gäller $f(v) \neq f(w)$; och
2. G är av grad 2 om varje nod har högst två grannar.

Konstruera en algoritm som givet en godtycklig graf G av grad 2 returnerar det minsta k sådant att G är k -färgningsbar. Algoritmen måste gå i polynomisk tid.

Uppgift 2. (8p)

Visa att följande problem (som är en begränsad variant av 3SAT) är NP-fullständigt:

Instans: En mängd U innehållande variabler och en mängd $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ där varje c_i antingen har utseendet $(x \vee y \vee z)$ eller $(\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$ för x, y, z valda ur U .

Fråga: Är formeln $c_1 \wedge \dots \wedge c_n$ satisfierbar.

Uppgift 3. (8p)

Låt S_1 and S_2 vara två mängder heltal (som kan vara både positiva och negativa). Tillverka en algoritm som avgör om det finns element $x_1 \in S_1$ och $x_2 \in S_2$ sådana att $x_1 + x_2 = 0$. Algoritmen ska gå i $O(n \log n)$ tid där $n = |S_1| + |S_2|$.

Uppgift 4. (8p)

Antag att **Sat** är en algoritm som givet en godtycklig propositionslogisk formel kan avgöra om den är satisfierbar eller ej i $O(1)$ tid. Använd **Sat** för att ta fram en algoritm **Unique-Sat** vars indata är en propositionslogisk formel F och som svarar "ja" om och endast om F har exakt *en* modell (och i annat fall "nej"). Den totala tidskomplexiteten för **Unique-Sat** får högst vara $O(n)$ där n är antalet variabler som förekommer i den givna formeln.

Uppgift 5. (8p)

Låt $G = \langle V, E \rangle$ vara en sammanhängande, oriktad graf där varje båge $e \in E$ har en *unik*¹, positiv, noll-skild vikt $w(e)$. Låt $T(e)$, $e \in E$, vara det uppspännande träd som har minimal sammanlagd vikt av alla uppspännande träd som innehåller bågen e . Beskriv en algoritm för att bestämma *samtliga* $T(e)$, $e \in E$. Algoritmen ska löpa i $O(|V|^2)$ tid.

¹Med unik vikt menas att det inte får finnas två bågar som tilldelats samma vikt.