

Kapitel 4

Relationer

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningsförslagen, skicka ett mejl till mikael.asplund@liu.se.

- 4.1. (a) Ja, R är reflexiv, eftersom för alla $x \in A$ gäller att $(x, x) \in R$:

$$(0, 0), (1, 1), (2, 2) \in R$$

- (b) Nej, R är inte symmetrisk. Till exempel $(0, 1) \in R$, men $(1, 0) \notin R$.
(c) Ja, R är antisymmetrisk, eftersom för alla $(x, y) \in R$ gäller att $x = y$ eller $(y, x) \notin R$.
(d) Ja, R är transitiv. För att inse detta måste vi räkna upp alla par av par $(x, y), (z, w) \in R$ sådana att $y = z$ och kontrollera om $(x, w) \in R$ (vi hoppar över fallen då $x = y$ eller $z = w$ eftersom dessa följer omedelbart). Då återstår endast ett par av par: $(0, 1), (1, 2) \in R$, vilket är OK eftersom $(1, 2)$

- 4.2. (a)

$$\begin{aligned} R &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \dots = \\ &\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\} \cup \\ &\{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 2)\} \cup \\ &\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\} \cup \\ &\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\} \cup \dots = \\ &\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\} \end{aligned}$$

- (b) Nej, $(4, 4) \notin R^+$
(c) Nej, $(3, 4) \in R^+$ men $(4, 3) \notin R^+$
(d) Nej, $(1, 2), (2, 1) \in R^+$
(e) Nej, eftersom den inte är reflexiv och inte heller antisymmetrisk.
- 4.3. (a) $R_1^- = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$
(b) Symmetriska höljet av R_1 : $R_1 \cup R_1^{-1} = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\} \cup \{(1, 1), (2, 1), (4, 3), (2, 4)\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$
(c) Låt $R = R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$. Det symmetriska höljet av R blir då:

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\} \cup \\ &\{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (4, 3), (2, 4), (4, 4)\} = \\ &\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\} \end{aligned}$$

- (d) $R_1^+ = R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 \cup R_1^4 \dots = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\} \cup \{(1, 2), (3, 2)\} \cup \emptyset = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

- 4.4. (a) $<$ är inte en partialordning på $\mathbf{N}$ eftersom $<$ inte är en reflexiv relation. Till exempel $2 \not< 2$
- (b) $\leq$ är en partialordning på $\mathbf{N}$.
- $\leq$ är **reflexiv** eftersom för alla $i \in \mathbf{N}$ gäller att $i \leq i$
 - $\leq$ är **transitiv** eftersom för alla $i, j, k \in \mathbf{N}$ gäller att $i \leq j \wedge j \leq k \rightarrow i \leq k$
 - $\leq$ är **anti-symmetrisk** eftersom för alla $i, j \in \mathbf{N}$ gäller att $i \leq j \wedge j \leq i \rightarrow i = j$
- (c) $\geq$ är en partialordning på $\mathbf{N}$ av samma skäl som ovan (byt ut $\leq$ mot $\geq$)
- (d) R är inte en partialordning eftersom den inte är anti-symmetrisk. $s(1) = s(10)$ vilket innebär att $(1, 10) \in R$ och $(10, 1) \in R$, men $1 \neq 10$.
- (e) R är inte en partialordning eftersom den inte är reflexiv. $2 \cdot 1 \not\leq 1$ så $(1, 1) \notin R$

4.5. Relationen *ärEnSorts* bör definieras som en partialordning. Vi går igenom egenskaperna en i taget:

- Reflexivitet. Det är rimligt att säga att en klass $\mathbf{A}$ *ärEnSorts* $\mathbf{A}$
- Transitivitet. Om en klass $\mathbf{A}$ *ärEnSorts* $\mathbf{B}$ och $\mathbf{B}$ *ärEnSorts* $\mathbf{C}$ så är det också rimligt att $\mathbf{A}$ *ärEnSorts* $\mathbf{C}$
- Anti-symmetri. Om en klass $\mathbf{A}$ *ärEnSorts* $\mathbf{B}$ och $\mathbf{B}$ *ärEnSorts* $\mathbf{A}$, är då $\mathbf{A} = \mathbf{B}$? Ja det är ett rimligt, men inte självklart. I vardagligt språk kan vi säga att "en gång är en sorts stig" och att en "stig är en sorts gång", men gång är inte exakt samma sak som stig. För klasser vill vi dock ha en mer exakta definitioner.

- 4.6. (a) Ja, R är reflexiv, transitiv och symmetrisk.
- (b) Nej, $\subseteq$ är inte symmetrisk: $\{0\} \subseteq \{0, 1\}$ men $\{0, 1\} \not\subseteq \{0\}$
- (c) Ja. Vi konstaterar först att $F_1 \Leftrightarrow F_2$ om sanningsvärdet för de två formerna är samma för alla tolkningar (rader i sanningstabellen).
- Reflexiv: $F \Leftrightarrow F$ eftersom F har samma sanningsvärde som sig själv.
 - Transitiv: Om $F_1 \Leftrightarrow F_2$ och $F_2 \Leftrightarrow F_3$ så har F_1, F_2 och F_3 samma sanningsvärde för alla tolkningar alltså måste $F_1 \Leftrightarrow F_3$
 - Symmetrisk: Om $F_1 \Leftrightarrow F_2$ så gäller också $F_2 \Leftrightarrow F_1$ enligt definitionen av $\Leftrightarrow$ på mängden av satslogiska formler.
- (d) R innehåller endast ett element: $(0, 0)$. Alltså är R inte reflexiv och därmed inte en ekvivalensrelation.
- (e) R är reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv: $(1, 2) \in R$ och $(2, 3) \in R$, men $(1, 3) \notin R$, så R är inte en ekvivalensrelation.

- 4.7. (a) $R = \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B), (C, C), (D, D)\}$
- (b) $\{(A, A), (A, B), (A, C), (B, A), (B, B), (B, C), (C, A), (C, B), (C, C)\}$
- (c) $\{(0, 0), (1, 1)\}$

4.8. Betrakta relationen $R \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ som definieras enligt

$$R = \{(i, j) \mid \exists n, m \in \mathbf{N}[i - 3n = j - 3m]\}$$

- (a) Vi behöver visa reflexivitet, transitivitet och symmetri:
- Reflexiv: Låt i vara godtyckligt tal i $\mathbf{N}$. Då finns det tal n och m nämligen $n = m = 0$ sådana att $i - 3n = i - 3 \cdot 0 = i = i - 3 \cdot 0 = i - 3m$. Alltså är $(i, i) \in R$.
 - Transitiv: Låt i, j, k vara godtyckliga tal i $\mathbf{N}$ sådana att $(i, j) \in R$ och $(j, k) \in R$. Då finns det heltal $n, m, n', m' \in \mathbf{N}$ sådana att

$$i - 3n = j - 3m \text{ och } j - 3n' = k - 3m'$$

Vi kan skriva om dessa uttryck till

$$i - 3n + 3m = j \text{ och } j = k - 3m' + 3n'$$

Kombinerar vi dessa (elimineras j) får vi:

$$i - 3n + 3m = k - 3m' + 3n'$$

Skriver om:

$$i - 3(n + n') = k - 3(m + m')$$

Eftersom $n, m, m', n' \in \mathbf{N}$ är även $(n + n') \in \mathbf{N}$ och $(m + m') \in \mathbf{N}$. Alltså är $(i, k) \in R$ och R är därmed transitiv.

- Symmetri: Om $(i, j) \in R$ så finns $n, m \in \mathbf{N}$ sådana att $i - 3n = j - 3m$ vilket av definitionen ger att även $(j, i) \in R$
- (b)
- $[0] = \{0, 3, 6, \dots\} = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N}[3k = n]\}$
 - $[1] = \{1, 4, 7, \dots\} = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N}[3k + 1 = n]\}$
 - $[2] = \{2, 5, 8, \dots\} = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N}[3k + 2 = n]\}$

4.9. Inget lösningsförslag finns för denna uppgift.

4.10. Inget lösningsförslag finns för denna uppgift.