Kapitel 3

Mängder

Om du hittar ett fel i någon av uppfiterna eller i lösningsförslagen, skicka ett mejl till mikael.asplund@liu.se.

3.1. (a) $\{A, B, C\} \cup \{C, D\} = \{A, B, C, D\}$

(b) $\{A, B, C\} \cap \{C, D\} = \{C\}$

(c) $\{A, B, C\} \cup \{\{C, D\}\} = \{A, B, C, \{C, D\}\}$

(d) $\{A, B, C\} \cap \{\{C, D\}\} = \varnothing$

(e) $\{A, B, C\} \cup \varnothing = \{A, B, C\}$

(f) $\{A, B, C\} \cup \{\varnothing\} = \{A, B, C, \varnothing\}$

3.2. (a) $|\{1, 2, 3\}| = 3$

(b) $|\{a, b, c\}| = 3$

(c) $|\{\}| = 0$

(d) $|\varnothing| = 0$

(e) $|\{0, \{1, 2\}\}| = 2$

(f) $|\{B, \varnothing, \{\varnothing\}\}| = 3$

3.3. (a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

(b) $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 2, 4\}$

(c) $A \smallsetminus B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \smallsetminus \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{1, 3\}$

(d) $B \smallsetminus A = \{0, 2, 4, 6, 8\} \smallsetminus \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{6, 8\}$

(e) $2^A = \{\varnothing,$
$\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 4\},$
$\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 3, 4\},$
$\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\},$
$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\},$
$\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3\}, \{3, 4\}, \{4\}\}$

3.4. (a) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{3, 4, 6\} \cap \{1, 6\} = \{6\}$

(b) $| 2^A |= 2^3 = 8$, eftersom A innehåller 3 element så innehåller potensmängedn 2^A: $2^3 = 8$ element

(c) $| A \times B |= |A| \cdot |B| = 3 \cdot 4 = 12$, eftersom kardinaliteten av kartesiska produkten av två mängder är produkten av kardinaliteten hos de ingående mängderna

(d) $2^{A \cap B} = 2^{\{1,2,5\} \cap \{2,3,4,5\}} = 2^{\{2,5\}} = \{\varnothing, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$

(e) $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 5\} \cup \{1, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$

3.5. (a) Vi börjar med att konstatera att $A \smallsetminus B = A \cap \overline{B}$ (Differenslagen), och använder sen de associativa och kommutativa lagarna för snitt

$$(A \smallsetminus B) \smallsetminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} = (A \smallsetminus C) \smallsetminus B$$

(b) Vi skriver åter om till annan form och använder distributiva lagen och DeMorgan för mängder:

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \setminus (B \cap C)$$

(c) Låt $A = \{0\}$ och $B = \{1\}$. Då gäller att

- $A \setminus B = \{0\} \setminus \{1\} = \{0\}$
- $2^{A \setminus B} = 2^{\{0\}} = \{\varnothing, \{0\}\}$ (Alltså gäller att $\varnothing \in 2^{A \setminus B}$)
- $2^A = \{\varnothing, \{0\}\}$
- $2^B = \{\varnothing, \{1\}\}$
- $2^A \setminus 2^B = \{\varnothing, \{0\}\} \setminus \{\varnothing, \{1\}\} = \{\{0\}\}$

Sammanfattningsvis: $2^{A \setminus B} = \{\varnothing, \{0\}\} \neq \{\{0\}\} = 2^A \setminus 2^B$, alltså gller inte påståendet.

3.6. (a) Ja! Låt $B = \varnothing$, och anta olikeheten sann:

$$|A| = |A \cup B| \leq 2|A \cap B| = 2|\varnothing| = 2 \cdot 0 = 0$$

Alltså $|A| \leq 0$ vilket innebär att A då också måste vara tomma mängden

(b) Ja! Låt $A = B = \{1\}$:

$$|A \cup B| = |\{1\} \cup \{1\}| = |\{1\}| = 1 \leq 2 = 2 \cdot 1 = 2|\{1\}| = 2|\{1\} \cap \{1\}| = 2|A \cap B|$$

(c) Låt x beteckna antalet gemensamma element i A och B. Då gäller att $|A \cup B| = x + (10 - x) + (10 - x) = 20 - x$, samt att $|A \cap B| = x$.

$$|A \cup B| \leq 2|A \cap B|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$20 - x \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$20 \leq 3x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \geq 20/3$$

Så A och B måste ha minst 7 gemensamma element.

3.7. (a) Vi börjar med att konstatera att $\overline{\varnothing} = \mathcal{U}$ enligt definitionen av komplement.

$$A \Delta \varnothing = \text{(def ovan)}$$
$$(A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = \text{(def. av mängddifferens)}$$
$$(A \cap \overline{\varnothing}) \cup (\varnothing \setminus A) = (\text{eftersom } \overline{\varnothing} = \mathcal{U})$$
$$(A \cap \mathcal{U}) \cup (\varnothing \setminus A) = \text{(Identitet)}$$
$$A \cup (\varnothing \setminus A) = \text{(def. av mängddifferens)}$$
$$A \cup (\varnothing \cap \overline{A}) = \text{(Dominans)}$$
$$A \cup \varnothing = \text{(Identitet)}$$
$$A$$

(b) De sista två visar vi endast stegen utan motiveringar $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$

(c) $\overline{A \Delta B} =$
$\overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} =$
$\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus A)} =$
$\overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(B \cap \overline{A})} =$
$(\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) =$
$(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) =$
$(\overline{A} \cap (\overline{B} \cup A)) \cup (B \cap (\overline{B} \cup A)) =$
$(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap A) \cup (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) =$
$(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \varnothing \cup \varnothing \cup (B \cap A) =$
$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

3.8. (a) Falskt. Vi visar med ett motexempel. Låt $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = B = \{0\}$. Då blir

$$A \setminus B = \{0\} \setminus \{0\} = \varnothing$$

medan

$$\overline{B \setminus A} = \overline{\{0\} \setminus \{0\}} = \overline{\varnothing} = \mathcal{U}$$

(b) Sant. Vi påminner om att $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$.

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) =$$

$$A \cap \overline{B} \cap B \cap \overline{A} =$$

$$(A \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{B}) =$$

$$\varnothing \cap \varnothing =$$

$$\varnothing$$