Lektionsuppgifter för TDDC75 Diskreta strukturer
Uppgifter

Mikael Asplund

25 september 2020

Om du hittar ett fel skicka ett mejl till mikael.asplund@liu.se.

Innehåll

1 Satslogik **3**

2 Deduktion **5**

3 Mängder **7**

4 Relationer **9**

5 Funktioner **11**

6 Rekursion, induktion och ordning **13**

A Satslogiska lagar **14**

Kapitel 1

Satslogik

1.1. Gör sanningstabell för nedanstående satslogiska formler

(a) $(r \wedge p)$

(b) $(p \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$

(c) $(((q \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg q)$

(d) $(((r \leftrightarrow r) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \wedge (r \rightarrow q)))$

(e) $((\neg r \rightarrow (q \wedge p)) \leftrightarrow p)$

(f) $((p \leftrightarrow (q \vee p)) \leftrightarrow r)$

(g) $\neg(\neg p \rightarrow (p \vee r))$

(h) $(r \vee \neg(p \vee q))$

(i) $\neg(\neg q \rightarrow (p \leftrightarrow r))$

(j) $(((r \vee r) \rightarrow q) \leftrightarrow \neg\neg p)$

(k) $(((q \vee q) \vee (q \wedge p)) \vee p)$

(l) $\neg(\neg q \vee (q \wedge p))$

(m) $((\neg p \vee p) \vee p)$

(n) $(q \wedge ((p \rightarrow r) \vee (q \leftrightarrow q)))$

(o) $(((r \leftrightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge r)$

(p) $(q \wedge ((p \vee r) \rightarrow (q \rightarrow r)))$

(q) $(\neg\neg q \rightarrow q)$

1.2. Två satslogiska formler F_1 och F_2 kallas logisk ekvivalenta (eller semantiskt ekvivalenta) och skrivs ofta $F_1 \Leftrightarrow F_2$ om de har samma sanningsvärden för alla tolkningar. Använd sanningstabeller för att visa lagarna nedan.

(a) Lagen om dubbel negation:
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

(b) De Morgans lagar:
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(c) Associativa lagarna:
$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
$(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$

(d) Distributiva lagarna:
$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

(e) Idempotens:
$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
$(p \vee p) \Leftrightarrow p$

(f) Identitetslagar:
$(p \wedge 1) \Leftrightarrow p$
$(p \vee 0) \Leftrightarrow p$

(g) Dominans:
$(p \wedge 0) \Leftrightarrow 0$
$(p \vee 1) \Leftrightarrow 1$

(h) Inversa lagar:
$(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow 0$
$(p \vee \neg p) \Leftrightarrow 1$

(i) Absorptionslagar:
$(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$
$(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$

(j) Implikationslagen:
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

(k) Kontrapositiva lagen:
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(l) Ekvivalenslagen:
$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

1.3. Använd lagarna ovan för att förenkla uttrycken nedan så långt som möjligt. För varje steg ange vilken lag du hänvisar till när du gör omskrivningen. Strikt formellt har vi inte introducerat möjligheten att skriva om delar av ett uttryck (substitutionsregeln), men det är tillåtet.

Exempel:

$(p \wedge p) \rightarrow \neg p$	$\Leftrightarrow$	(Idempotens)
$p \rightarrow \neg p$	$\Leftrightarrow$	(Implikation)
$\neg p \vee \neg p$	$\Leftrightarrow$	(Idempotens)
$\neg p$		

(a) Förenkla uttrycket: $(p \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$, om du fått rätt svar kan du verifiera mha sanningstabell för uppgift 1(b).

(b) Förenkla uttrycket: $(((q \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg q)$, om du fått rätt svar kan du verifiera mha sanningstabell för uppgift 1(c).

1.4. En tautologi har sanningsvärdet 1 för alla möjliga tolkningar och är alltså logiskt ekvivalent med uttrycket 1. Visa genom omskrivningar på samma sätt som förra uppgiften att följande satser är tautologier.

(a) $(((q \wedge q) \wedge (p \vee q)) \rightarrow q)$

(b) $(\neg(r \leftrightarrow r) \rightarrow \neg(p \wedge p))$

(c) $(q \rightarrow (q \vee (q \vee r)))$

(d) $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$

(e) $(\neg(q \rightarrow r) \rightarrow q)$

Kapitel 2

Deduktion

2.1. Använd deduktion för att härleda följande (för att underlätta har de vanligaste reglerna sammanfattats i tabell A.1):

(a) Bevisa att Modus ponens är en giltig logisk konsekvens utan att använda Modus ponens.

(b) Bevisa att $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Notera att $p \Leftrightarrow q$ omm $p \Rightarrow q$ och $q \Rightarrow p$.

2.2. En av möjligheterna vid ett deduktionsbevis är så kallad indirekt härledning, eller motsägelsebevis. Ett exempel på detta är följande bevis för att
$(p \to q), (q \to r), \neg r \Rightarrow \neg p$:

(1)	$p \to q$	Premiss
(2)	$q \to r$	Premiss
(3)	$\neg r$	Premiss
(4)	$\neg\neg p$	Hypotes
(5)	p	(4) och dubbel negation
(6)	q	(5), (1) och Modus ponens
(7)	r	(6), (2) och Modus ponens
(8)	$r \wedge \neg r$	(3), (7) och konjunktionsregeln
(9)	0	(8) och inversa lagen
(10)	$\neg p$	(4)-(9) och Motsägelseregeln

Notera att raderna 4-9 är inskjutna för att markera att de behandlar en hypotes. Detta kan även markeras med linjer el dylikt.

Använd motsägelsebevis för att bevisa följande:

(a) $((p \to q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ (utan att använda kontrapositiva lagen)

(b) Vad som helst kan härledas från ett falskt påstående, exempelvis: $p \wedge \neg p \Rightarrow q$

(c) $(\neg q \vee r) \Rightarrow (p \leftrightarrow p)$

(d) $((p \wedge q) \wedge q) \Rightarrow (p \vee p)$

(e) $(\neg p \leftrightarrow r) \Rightarrow (p \to p)$

(f) $((q \to q) \to \neg q) \Rightarrow \neg q$

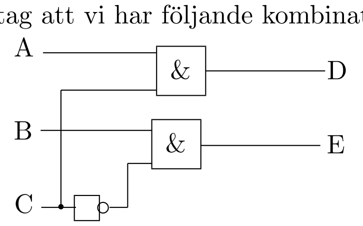
2.3. Översätt följande påståenden till predikatlogiska formler:

(a) Alla bilar har fyra hjul.

(b) Ingen kan vara förälder till sig själv.

(c) Antingen är alla bollar svarta eller så är ingen boll svart.

2.4. Antag att vi har följande kombinatoriska krets:



Visa att D och E inte kan vara 1 samtidigt genom att logiskt beskriva kretsen och den önskade egenskapen. Utför beviset med naturlig deduktion. Du får endast använda de primitiva härledningsreglerna från bilaga A, men får härleda egna regler om de härledda reglerna redovisas och utförs med hjälp av primitiva regler.

2.5. Ange för följande påståenden domäner för x och y så att påståendet är en tautologi.

(a) $\forall x \exists y[x + y = x]$

(b) $\forall x \exists y[y^2 = x]$

(c) $\forall x \forall y[x = y]$

(d) $\forall x \forall y[x < y]$

(e) $\exists x \forall y[x^2 = y]$

Kapitel 3

Mängder

3.1. Förenkla följande uttryck:

(a) $\{A, B, C\} \cup \{C, D\}$

(b) $\{A, B, C\} \cap \{C, D\}$

(c) $\{A, B, C\} \cup \{\{C, D\}\}$

(d) $\{A, B, C\} \cap \{\{C, D\}\}$

(e) $\{A, B, C\} \cup \varnothing$

(f) $\{A, B, C\} \cup \{\varnothing\}$

3.2. Bestäm kardinaliteten av följande mängder:

(a) $\{1, 2, 3\}$

(b) $\{a, b, c\}$

(c) $\{\}$

(d) $\varnothing$

(e) $\{0, \{1, 2\}\}$

(f) $\{B, \varnothing, \{\varnothing\}\}$

3.3. Låt $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Vad är resultatet av följande uttryck:

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A \setminus B$

(d) $B \setminus A$

(e) 2^A

3.4. Antag att $A = \{1, 2, 5\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$. Vad blir resultatet av följande uttryck givet att universum är $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

(a) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $|\,2^A\,|$

(c) $|\,A \times B\,|$

(d) $2^{A \cap B}$

(e) $A \cup \overline{B}$

3.5. Visa eller motbevisa var och en av följande likheter, där "$\setminus$" betecknar mängddifferens:

(a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

(b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

(c) $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$.

3.6. Låt A och B vara två mängder om vilka vi vet att

$$|A \cup B| \leq 2\,|A \cap B|.$$

(a) Kan endera eller båda av mängderna A och B vara tomma mängden?

(b) Kan A och B vara samma icke-tomma mängd?

(c) Om $|A| = |B| = 10$, hur många gemensamma element måste då A och B minst ha?

3.7. Definiera den *symmetriska differensen* Δ mellan mängder på vanligt sätt, dvs. $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, där $\setminus$ betecknar vanlig mängddifferens). Visa att följande likheter gäller för godtyckliga mängder A och B.

(a) $A\Delta\varnothing = A$

(b) $A\Delta B = B\Delta A$

(c) $\overline{A\Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

3.8. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska och antingen bevisa eller motbevisa påståendena:

(a) $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$

(b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$

Kapitel 4

Relationer

4.1. Låt $A = \{0, 1, 2\}$ och låt $R \subseteq A \times A$ vara en relation definerad enligt följande

$$R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$$

(a) Är R reflexiv?
(b) Är R symmetrisk?
(c) Är R antisymmetrisk?
(d) Är R transitiv?

4.2. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och låt R vara en relation på A definierade enligt följande:

$$R = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$$

(a) Beräkna R^+, dvs. det transitiva höljet av R.
(b) Är R^+ reflexiv?
(c) Är R^+ symmetrisk?
(d) Är R^+ antisymmetrisk?
(e) Är R^+ en partialordning?

4.3. Låt R_1 och R_2 vara följande relationer på $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{array}{lcl} R_1 & = & \{(1,1), (1,2), (3,4), (4,2)\} \\ R_2 & = & \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,4), (2,2)\} \end{array}$$

Skriv ut följande relationer (på samma form som relationerna ovan):

(a) Reflexiva höljet av R_1.
(b) Symmetriska höljet av R_1.
(c) Symmetriska höljet av $R_1 \cup R_2$.
(d) Transitiva höljet av R_1.

4.4. Avgör om följande relationer utgör partialordningar. Motivera varför eller varför inte.

(a) $<$ på de naturliga talen, $\mathbf{N}$
(b) $\leq$ på $\mathbf{N}$
(c) $\geq$ på $\mathbf{N}$
(d) $R \subseteq A \times A$ där $A = \{0, 1, \dots, 100\}$, $R = \{(i,j) \in A \times A \mid s(i) \leq s(j)\}$, och $s(i)$ är siffersumman för talet i (exempelvis $s(13) = 1 + 3 = 4$).
(e) $R \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ där $R = \{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 2i \leq j\}$

4.5. I objektorienterad programmering kan en klass *ärva* egenskaper av en annan klass. Som ett exempel kan vi tänka oss en klass **Fordon**. En *barnklass* (eller subklass) till **Fordon** är till exempel en **Bil**. En barnklass till bil är exempelvis en **Elbil**. Vi kan nu tänka oss en relation mellan klasser som vi kallas *ärEnSorts*, så att **Elbil** *ärEnSorts* **Bil**, och **Bil** *ärEnSorts* **Fordon**. Ta ställning till om relationen *ärEnSorts* bör definieras som en partialordning.

4.6. Avgör om följande relationer utgör ekvivalensrelationer. Motivera varför eller varför inte.

(a) $R \subseteq A \times A$ där $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1),$
$(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

(b) $\subseteq$ på 2^A för $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

(c) $\Leftrightarrow$ på mängden av satslogiska formler.

(d) $R = \{(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid i + j = 0\}$

(e) $R = \{(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid |i - j| < 2\}$

4.7. För varje partition nedan, ange vilken ekvivalensrelation den genererar.

(a) $\{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}\}$

(b) $\{\{A, B, C\}\}$

(c) $\{\{0\}, \{1\}\}$

4.8. Betrakta relationen $R \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ som defineras enligt
$R = \{(i, j) \mid \exists n, m \in \mathbf{N}[i - 3n = j - 3m]\}$

(a) Visa att R är en ekvivalensrelation.

(b) Karakterisera (beskriv) ekvivalensklasserna $[0], [1], [2]$

4.9. Låt $P \subseteq A \times A$ och $Q \subseteq A \times A$ vara två godtyckliga ekvivalensrelationer. Visa att också $P \cap Q$ måste vara en ekvivalensrelation. Gäller detsamma för $P \cup Q$?

4.10. Antag att $R \subseteq A \times A$ är en partialordning på A. Antag vidare att $P \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ är definerad enligt följande

$$(x_1, x_2)P(y_1, y_2) \text{ omm } x_1 R y_1 \text{ och } x_2 R y_2.$$

Visa eller motbevisa att P är en partialordning på $A \times A$.

Kapitel 5

Funktioner

5.1. Låt P vara mängden av alla möjliga personnummer och $f : P \mapsto \mathbf{N}$ vara en (partiell) funktion som anger nuvarande ålder för alla som har ett personnummer.

(a) Är f injektiv?

(b) Är f surjektiv?

(c) Är f bijektiv?

5.2. Låt $A = \{x, y, z\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ och funktionerna $f : A \to B$ och $g : B \to A$ definieras som $f = \{x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 3\}$ och $g = \{0 \mapsto z, 1 \mapsto y, 2 \mapsto z, 3 \mapsto z\}$.

(a) Vad blir sammansättningen $g \circ f$?

(b) Vad blir sammansättningen $f \circ g$?

5.3. Antag att $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definieras enligt

$$f(n) = n + 1$$

och att $g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definieras enligt

$$g(n) = \begin{cases} 0 \text{ om } n \text{ är jämn,} \\ 1 \text{ om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

(a) Är f eller g injektiv och/eller surjektiv?

(b) Vad blir $(f \circ g)(n)$ för de fem minsta naturliga talen n?

(c) Vad blir på motsvarande sätt $(g \circ f)(n)$?

(d) Beskriv funktionen $(f \circ f)(n)$

5.4. Antag att vi har fyra *olika* funktioner f_1, f_2, f_3, f_4 där

- f_1 är injektiv men inte surjektiv,
- f_2 är surjektiv men inte injektiv,
- f_3 är bijektiv, och
- f_4 är varken injektiv eller surjektiv.

Ge exempel på hur funktionerna f_1, f_2, f_3, f_4 kan se ut givet att funktionernas domäner och värdemängder kan väljas bland följande mängder:

$$A = \{a, b, c\} \quad B = \{0, 1, 2\} \quad C = \{0, 1\}.$$

5.5. En logisk grind (i digitaltekniken) med m st. ingångar $x_1, \ldots, x_m$ kan betraktas som en funktion $f : \{0, \ldots, 2^m - 1\} \mapsto \{0, 1\}$, där ingångarna betraktas som en binär kodning av ett naturligt tal. Bestäm för var och en av följande definitioner av f vilken typ av grind den motsvarar, eller om den inte motsvarar någon av de vanliga grindtyperna alls.

(a) $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{om } n = 2^m - 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

(b) $f(n) = \begin{cases} 0, & \text{om } n = 0 \\ 1, & \text{annars} \end{cases}$

(c) $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{om } n < 2^m - 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

5.6. Låt $f : \mathbf{N} \to 2^{\mathbf{N}}$ vara en funktion definierad som $f(n) = \{i \in \mathbf{N} \mid i \leq n\}$ för alla $n \in \mathbf{N}$.

(a) Ange funktionsvärdena för $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ och $f(5)$.

(b) Är f injektiv?

(c) Är f surjektiv?

(d) Existerar den inversa funktionen $f^{-1} : 2^{\mathbf{N}} \mapsto \mathbf{N}$?

5.7. Låt F vara mängden av satslogiska formler (exempelvis gäller att $(p \wedge q) \in F$). Låt funktionen $f : F \times F \to \{0, 1\}$, vara definerad så att $f(F_1, F_2) = 1$ om $F_1 \Rightarrow F_2$ och $f(F_1, F_2) = 0$ annars.

(a) Avgör värdet av $f((p \vee q), (p \vee q \vee r))$.

(b) Är f surjektiv?

(c) Är f injektiv?

(d) Beskriv vilka element som finns i mängden $\{F_i \in F \mid f(1, F_i) = 1\}$ (de har en speciell benämning).

5.8. Kryptering av ett meddelande kan modelleras som en funktion (encrypt) $e_K : A \to B$ där A är mängden av klartextmeddelanden, B är mängden av krypterande meddelanden och K är nyckeln. På motsvarande sätt finns en dekrypteringsfunktion $d_K : B \to A$, som för varje krypterat meddelande ger det ursprungliga meddelandet i klartext.

(a) Uttryck funktionen d_K med hjälp av e_K.

(b) Är e_K alltid, aldrig, eller ibland injektiv?

(c) För att rent praktiskt kunna skapa krypterings och dekrypteringsfunktioner brukar meddelanden delas upp i *block* av en viss storlek, till exempel 128 bitar. Om elementen i A består av 128 bitars meddelanden, vad gäller då för storleken på elementen i B? Hur relaterar detta till huruvida e_K är injektiv och/eller surjektiv?

5.9. Antag att $f : A \to B$ och $g : B \to C$. Visa eller motbevisa följande påståenden

(a) Om $g \circ f$ är surjektiv så måste f och g vara surjektiva.

(b) Om f och g är surjektiva så måste $g \circ f$ vara surjektiv.

(c) Om $g \circ f$ är injektiv så måste f och g vara injektiva.

Kapitel 6

Rekursion, induktion och ordning

6.1. Visa att $2^n < n!$ för alla heltal $n > 3$.

6.2. Visa att $n^2 < 2^n$ för alla heltal $n > 4$.

6.3. Visa att alla heltal $n > 3$ kan skrivas på formen $n = 2a + 5b$ där $a, b \in \mathbf{N}$

6.4. Låt $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ för $n \geq 2$. Visa att $a_n < (7/4)^n$ för alla $n \geq 0$.

6.5. Låt $E = \{n \in \mathbf{N} \mid n/2 \in \mathbf{N}\}$ och visa att $|N| = |E|$ genom att skapa en bijektion $f : \mathbf{N} \to E$.

6.6. Låt D vara följande binära relation på de naturliga talen $\mathbf{N}$:

$$x\ D\ y \text{ omm det existerar } z \in \mathbf{N} \text{ sådant att } x \cdot z = y$$

Visa att $(\mathbf{N}, D)$ är en pomängd.

6.7. Låt $A = \{A, B, C, D, E, F\}$.

(a) Skapa en partialordning $R \subseteq A \times A$.
(b) Rita dess Hassediagram.
(c) Avgör om R^{-1} är en partialordning.
(d) Avgör om R^2 är en partialordning.
(e) Finns det någon relation $S \subset R$ som också är en partialordning?
(f) Finns det någon relation T sådan att $R \subset T$ och T är en partialordning?

6.8. Låt A vara en icke-tom mängd och R vara en relation, $R \subseteq A \times A$ och låt

$$\begin{array}{lcll} R^0 & = & id_A & \\ R^{n+1} & = & R \circ R^n & \quad (n \geq 0) \end{array}$$

Visa med hjälp av induktion att om R är symmetrisk så är även R^n symmetrisk för alla $n \geq 0$.

Bilaga A

Satslogiska lagar

Regel	**Benämning**
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	De Morgans lagar
$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$ $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$	Associativa lagarna
$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	Distributiva lagarna
$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ $(p \vee p) \Leftrightarrow p$	Idempotens
$(p \wedge 1) \Leftrightarrow p$ $(p \vee 0) \Leftrightarrow p$	Identitetslagarna
$(p \wedge 0) \Leftrightarrow 0$ $(p \vee 1) \Leftrightarrow 1$	Dominans
$(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow 0$ $(p \vee \neg p) \Leftrightarrow 1$	Inversa lagarna
$(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$ $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$	Absorption
$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	Implikationslagen
$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$	Kontrapositiva lagen
$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \Rightarrow p \to r$	Syllogism
$p \wedge q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell A.1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser