Relationer och höljen

Mikael Asplund

13 september 2018

Syftet med detta dokument är att komplettera kursmaterialet i kursen TDDC75 Diskreta strukturer med grundläggande begrepp gällande relationer och höljen. Framställningen här är rent matematisk utan att göra kopplingar till tillämpningar där relationer och höljen faktiskt kan vara användbara.

1 Relationer

Vi börjar från början och definierar begreppet *par* som kommer utgöra grunden för resten av dokumentet. Därefter går vi vidare med kartesisk produkt och binära relationer.

Definition 1. Ett *par* (x, y) är en *ordnad* samling av två (möjligen lika) element x och y.

Exempel 1. Exempel på par är $(0, 2), (1, 2), (0, 0), (a, b), (\varnothing, \{0, 1\}), (0, (0, 1))$. Som synes så kan förstås även mängder och par vara element i ett par. Exempel som *inte* är par är

- (1) eftersom det innehåller bara ett element
- $\{0, 1\}$ eftersom en mängd är oordnad
- $(0, 1, 2)$ eftersom det innehåller tre element

Det är förstås möjligt att generalisera definitionen av par och gälla ett större antal element, vi kallar det då en n-tupel, och i det specifika fallet $(0, 1, 2)$ kan vi säga att det är en 3-tupel. Vi kommer dock i denna framställning att begränsa oss till par och binära relationer, eftersom det är grunden för relationshöljen.

När vi nu har definierat och förstått begreppet av par så kan vi enkelt utöka detta till den kartesiska produkten.

Definition 2. Låt A och B vara mängder. Den *kartesiska produkten* (eller *kryssprodukten*) av A och B definieras som

$$\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \{(x, y) \mid x \in \mathsf{A} \text{ och } y \in \mathsf{B}\}$$

Exempel 2. Låt $A = \{0, 1, 2\}$ och $B = \{a, b\}$, då blir den kartesiska produkten $A \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$. Observera dock att $(a, 0) \notin A \times B$, eftersom paren är ordnade. Det går tex också bra att bilda den kartesiska produkten $B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Som synes så innehåller den kartesiska produkten $A \times B$ sex element, dvs $|A \times B| = 6$ och $|B \times B| = 4$. I allmänhet gäller att $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Vi kan nu definiera begreppet relation, vilket vi gör genom att säga att en relation är en delmängd av den kartesiska produkten mellan två mängder. Precis som att par kan generaliseras till att gäla tupler så kan relationer också generaliseras till att gälla på fler än två mängder. De relationer som vi arbetar med här är dock binära (tvåställiga).

Definition 3. Låt A och B vara mängder. En *binär relation* R på A och B är en delmängd till $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, dvs

$$R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{B}$$

Observera att $(x, y) \in R$ ofta skrivs R(x,y) eller xRy. I de fall som $A = B$ dvs vi definerar en relation $R \subseteq A \times A$ så säger vi att R är en relation på A. Om ett par (x, y) tillhör relationen R så kan man säga att x relaterar till y.

Exempel 3. Vi fortsätter på exemplet ovan där $A = \{0, 1, 2\}$ och $B = \{a, b\}$. Följande är då några av de många möjliga relationer som finns på A och B.

- $R = \{(0, a), (1, b)\}$
- $R = \{(0, b), (1, a), (2, a)\}$
- $R = A \times B$ (dvs alla möjliga par)
- $R = \varnothing$ (relationen är tom)

Innan vi går vidare ska vi definiera två speciella relationer, identitetsrelationen och inversrelationen.

Definition 4. Låt A vara en mängd. Indentitsreltationen på A definieras som $\mathrm{id}_{\mathsf{A}} = \{(x, x) \mid x \in \mathsf{A}\}$.

Exempel 4. Låt $A = \{0, 1, 2, 3\}$ då är identitetsrelationen på A

$$id_A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\},$$

dvs den innehåller alla element i A, men som dublettpar.

Inversrelationen definieras utifrån en redan existerande relation R. Principen är enkel. Alla par vänds åt andra hållet så att alla par (x, y) omvandlas till (y, x).

Definition 5. Låt $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ vara en relation. *Inversen* R^{-1} till R defineras som

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Exempel 5. Låt $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$, då blir $R^{-1} = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$.

2 Egenskaper

Vi har sett att en relation definieras som en delmängd till den kartesiska produkten mellan två mängder. Uppenbarligen finns det alltså ett stort antal möjliga relationer över två mängder. Vi ska nu gå igenom ett antal egenskaper som dessa relationer kan ha för att skapa en sorts systematik för att förstå relationer. De egenskaper som vi tar upp i denna framställning är reflexivitet, transitivitet, symmetri och anti-symmetri. Det finns även andra egenskaper som kan definieras för relationer, men vi begränsar oss till de mest vanligt förekommande. Alla dessa egenskaper är definierade över relationer på formen $R \subseteq A \times A$, dvs det är samma sorts element i båda delar av de ingående paren. Vi kommer genomgående att använda $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och relationerna nedan för att förklara begreppen:

- $R_1 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$
- $R_2 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)\}$
- $R_3 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
- $R_4 = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$
- $R_5 = \varnothing$

2.1 Reflexivitet

Först ut är begreppet reflexivitet vilket betyder att alla element från ursprungsmängden (A) ska relatera till sig själva. Det kan dock finnas andra par i relationen förutom de som krävs för att relationen ska vara reflexiv.

Definition 6. En relation $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ är *reflexiv* omm $(x, x) \in R$ för alla $x \in \mathsf{A}$.

Exempel 6. Vi går igenom relationerna ovan och undersöker om de är reflexiva.

- R_1 är **inte** reflexiv eftersom tex $(0, 0) \notin R_1$
- R_2 är **inte** reflexiv eftersom tex $(0, 0) \notin R_2$
- R_3 är reflexiv eftersom $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R_3$
- R_4 är **inte** reflexiv eftersom tex $(0, 0) \notin R_4$
- R_5 är **inte** reflexiv eftersom tex $(0, 0) \notin R_5$

2.2 Transitivitet

Nästa begrepp är transitivitet. Detta kan intuitivt förstås som att den fortplantar kopplingar.

Definition 7. En relation $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ är *transitiv* omm $(x, y) \in R$ och $(y, z) \in R$ medför att $(x, z) \in R$, för alla $x, y, z \in \mathsf{A}$.

Här är det viktigt att komma ihåg att vi har att göra med en implikation (medför att), så att om premissen är falsk så är implikationen sann.

Exempel 7. Vi går igenom exemplen och undersöker transitivitet.

- R_1 är transitiv eftersom det inte finns två par $(x, y), (y, z)$ i R_1 (premissen är falsk).
- R_2 är **inte** transitiv eftersom $(0, 1), (1, 2) \in R_2$ men $(0, 2) \notin R_2$.

- R_3 är **inte** transitiv eftersom $(0,1),(1,2) \in R_3$ men $(0,2) \notin R_3$.
- R_4 är transitiv eftersom för alla möjliga par $(x,y),(y,z)$ nämligen $(0,1)$ och $(1,2)$ så finnz också $(x,z) \in R_4$, dvs $(0,2) \in R_4$.
- R_5 är transitiv eftersom inte finns två par $(x,y),(y,z)$ i R_5 (premissen är falsk).

2.3 Symmetri

Vi går vidare med egenskaperna och tar upp begreppet symmetri. Detta kan förstås som att alla par i relationen ska ha sin egen spegelbild med i relationen också.

Definition 8. En relation $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ är *symmetrisk* omm $(x,y) \in R$ medför att $(y,x) \in R$, för alla $x,y \in \mathsf{A}$.

Exempel 8. Vi går igenom exemplen och undersöker symmetri.

- R_1 är **inte** symmetrisk eftersom tex $(0,1) \in R_1$ men $(1,0) \notin R_1$
- R_2 är symmetrisk eftersom för varje par $(x,y) \in R_2$ så finns även $(y,x) \in R_2$
- R_3 är **inte** symmetrisk eftersom tex $(0,1) \in R_1$ men $(1,0) \notin R_1$
- R_4 är **inte** symmetrisk eftersom tex $(0,1) \in R_1$ men $(1,0) \notin R_1$
- R_5 är symmetrisk eftersom det inte finns några par i R_5 (premissen är falsk)

2.4 Anti-symmetri

Sist ut är begreppet anti-symmetri vilket i princip säger att det inte får finnas några spegelbilder i relationen, förutom reflexiva element som är sina egna spegelbilder.

Definition 9. En relation $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ är *anti-symmetrisk* omm $(x,y) \in R$ och $(y,x) \in R$ medför att $x = y$, för alla $x,y \in \mathsf{A}$.

Exempel 9. Vi går igenom exemplen och undersöker symmetri.

- R_1 är anti-symmetrisk eftersom det inte finns några par $(x,y),(y,x)$. Notera att det andra elementet i det ena paret ska vara samma som det första elementet i det andra paret.
- R_2 är **inte** anti-symmetrisk eftersom $(0,1) \in R_2$ och $(1,0) \in R_2$ och $0 \neq 1$.
- R_3 är anti-symmetrisk eftersom de enda paren $(x,y),(y,x)$ som finns är för $x = y = 0$,$x = y = 1$,$x = y = 2$,$x = y = 3$
- R_4 är anti-symmetrisk eftersom det inte finns några par $(x,y),(y,x)$.
- R_5 är anti-symmetrisk eftersom det inte finns några par $(x,y),(y,x)$.

En relation kan alltså både vara symmetrisk och anti-symmetrisk på samma gång (tex den tomma relationen). Det är även möjligt för en relation att vara varken symmetrisk eller anti-symmetrisk.

3 Sammansättning

Relationer kan sättas ihop med varandra och därigenom ge upphov till nya relationer. Detta kallas för sammansättning.

Definition 10. Låt $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ och $S \subseteq \mathsf{B} \times \mathsf{C}$. *Sammansättningen* av R och S betecknas $S \circ R$ och defineras som

$$S \circ R = \{(x, z) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C} \mid \exists y \in \mathsf{B}[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S]\}$$

Exempel 10. Låt $R = \{(0, 1), (1, 2)\}$ och $S = \{(1, 3), (2, 4)\}$. Då blir sammansättningen $S \circ R = \{(0, 3), (1, 4)\}$

I de fall som relationen ar definerad över en enskild mängd så kan vi utföra sammansättningen av relationen med sig själv. Det kan nästan liknas vid att multiplicera ett tal med sig självt. Och på samma sätt kan vi använda potentsnotation för relationer.

Definition 11. Låt $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ vara en relation. Vi definierar då

$$\begin{array}{lcll} R^0 & = & \mathrm{id}_{\mathsf{A}} & \\ R^{n+1} & = & R \circ R^n & \quad (n \geq 0) \end{array}$$

Här har vi ett exempel på en rekursiv definition. Till exempel relationen R^5 definieras som $R^5 = R \circ R^4$. Genom att utveckla uttrycket kommer man till slut ner till $R^1 = R \circ R^0 = R \circ \mathrm{id}_{\mathsf{A}} = R$.

4 Höljen

Det sista avsnittet i detta dokument beskriver relationshöljen (eng. closure). Intuitivt kan vi förstå detta begrepp som att man lägger till par till en relation till relationen uppfyller en viss önskad egenskap.

Vi börjar med det reflexiva höljet som för en viss relation lägger till de nödvändiga par så att relationen blir reflexiv.

Definition 12. Det *reflexiva höljet* $R^{=}$ av en relation $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ är

$$R^{=} = R \cup \mathrm{id}_{\mathsf{A}}$$

Exempel 11. Låt $A = \{0, 1, 2\}$ och $R \subseteq A \times A$, $R = \{(0, 1), (1, 2)\}$, då blir det reflexiva höljet $R^{=} = R \cup id_A = \{(0, 1), (1, 2)\} \cup \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

På motsvarande sätt är det symmetriska höljet att helt enkelt lägga till de spegelbildspar som saknas.

Definition 13. Det *symmetriska höljet* av $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ är

$$R \cup R^{-1}$$

Exempel 12. Låt $R = \{(0, 1), (1, 2)\}$, då blir det symmetriska höljet $R \cup R^{-1} = \{(0, 1), (1, 2)\} \cup \{(1, 0), (2, 1)\} = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)\}$

Det transitiva höljet är lite lurigare och definieras som unionen av alla positiva potenser av relationen.

Definition 14. Det *transitiva höljet* R^+ av $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ är

$$R^+ = \bigcup_{i>0} R^i$$

Observera att det finns oändligt många $i > 0$ så gör denna definition något svårhanterlig när man ska räkna ut R^+. Som tur finns det en metod som gör att det transitiva höljet kan beräknas. Principen är ganska enkel, anta att $R \subseteq A \times A$ är en relation och vi vill beräkna R^+.

1. Låt $S_0 = R$
2. Låt $S_{n+1} = (R \circ S_n) \cup S_n$, dvs lägg till alla element som kommer av att applicera R
3. Om $S_{n+1} = S_n$, så är det klart, $R^+ = S_n$, annars gå till 2.

Det är möjligt att matematiskt bevisa att denna metod leder fram till det önskade resultatet, men vi utelämnar det eftersom det kräver användning av induktionsbevis.

Exempel 13. Vi kan illustrera med ett exempel. Låt $R = \{(0,1),(1,2),(2,3)\}$.

- $S_0 = R = \{(0,1),(1,2),(2,3)\}$.
- $S_1 = (R \circ S_0) \cup S_0 = \{(0,2),(1,3)\} \cup \{(0,1),(1,2),(2,3)\} = \{(0,1),(0,2),(1,2),(1,3),(2,3)\}$
- $S_2 = (R \circ S_1) \cup S_1 = \{(0,2),(0,3),(1,3)\} \cup \{(0,1),(0,2),(1,2),(1,3),(2,3)\} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$
- $S_3 = (R \circ S_1) \cup S_1 = \{(0,2),(0,3),(1,3))\} \cup \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\} = S_2$
- $R^+ = S_2 = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

Till sist, vi kan kombinera de reflexiva och transitiva höljena enligt följande.

Definition 15. Det *reflexiva transitiva höljet* R^* av $R \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ är

$$R^* = \bigcup_{i \geq 0} R^i \quad (= R^+ \cup \mathrm{id}_{\mathsf{A}})$$