Tentamen i Diskreta strukturer

Lösningsförslag 2023-10-24

1. (a) Definition av satsvariabler:
   - b - kunden har betalningsanmärkningar
   - k - kunden har hög kreditvärdighet
   - l - lånet har beviljats
   - s - kunden har säkerhet för lånet
   - i - kunden har regelbunden inkomst
   - t - kunden har tillräckliga tillgångar

   Påståenden:
   - $b \to \neg k$
   - $l \to (k \wedge s)$
   - $k \to (i \vee t)$

   (b) Påståendet uttryckas $k \wedge \neg i \wedge \neg t$.

k	i	t	$\neg k$	$k \to (i \vee t)$	$\neg i$	$\neg t$	$k \wedge \neg i \wedge \neg t$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0

   Som synes i tabellen så har man att när den tredje regeln gäller (alla rader förutom den femte) så är påståendet falskt. Alltså det finns inget fall där kunden har hög kreditvärdighet men inte regelbunden inkomst eller tillräckliga tillgångar om man följer bankens regler.

   (c) Påstående: $l \to \neg b$

(1)	$l \to (k \wedge s)$	Premiss
(2)	$b \to \neg k$	Premiss
(3)	l	Hypotes
(4)	$k \wedge s$	(3),(1) och modus ponens
(5)	k	(4) och konjuktiv förenkling
(6)	$\neg b$	(5),(2) och modus tollens
(7)	$l \to \neg b$	(3)-(6) och implikationsintroduktion eller hypotetisk härledning

2. - $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ Vi bevisar detta påstående. Om $(A \cap B) = \varnothing$ så gäller påståendet trivialt. Om $(A \cap B) \neq \varnothing$ så kan vi betrakta ett godtyckligt element $x \in (A \cap B)$. Enligt definitionen av $\cap$ så har man $x \in A$ och $x \in B$. Det följer då att $x \in A \cup B$ enligt definitionen av $\cup$. Eftersom x är gotyckligt så har man att alla element i $(A \cap B)$ också är element i $(A \cup B)$, alltså $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$.
   - $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$ Vi motbevisar detta påstående. Låt $A = \{0, 1\}$ och $B = \{0, 2\}$. Då har man $(A \setminus B) = \{1\}$ och $(B \setminus A) = \{2\}$ så $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2\}$. Däremot är $A \cup B = \{0, 1, 2\}$ så $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq A \cup B$.

- $A \subseteq 2^A$ Vi motbevisar detta påstående. Låt $A = \{1\}$. Då har man $2^A = \{\varnothing, \{1\}\}$. Eftersom $1 \notin 2^A$ kan inte A vara en delmängd av 2^A.
- $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B = B \setminus A$ Vi bevisar detta påstående. $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B =$ /Distributiva och associativa lagar/ $= (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) =$ /Inversa lagar/ $=$ $(B \cap \overline{A}) \cup \varnothing =$ /Identitetslag/ $= (B \cap \overline{A}) =$ /Diferenslagen/ $= B \setminus A$.
- $(A \cup B) \in 2^{A \cap B}$ Vi motbevisar detta påstående. Låt $A = \{0, 1\}$ och $B = \{0\}$. Då har man $A \cup B = \{0, 1\}$ och $A \cap B = \{0\}$. Det följer att $2^{A \cap B} = \{\varnothing, \{0\}\}$ och $A \cup B \notin 2^{A \cap B}$.

3. (a) $(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(5 + 1) = 3 * 6 = 18$
   (b) $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(3 * 5) = 15 + 1 = 16$
   (c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 3x + 1$
   (d) $(g \circ g)(x+1) = g(g(x+1)) = g(3*(x+1)) = g(3x+3) = 3*(3x+3) = 9x+9$
   (e) $(g \circ f \circ g \circ f)(x) = g(f(g(f(x)))) = g(f(g(x + 1))) = g(f(3x + 3)) = g(3x + 3 + 1) = 3 * (3x + 4) = 9x + 12$

4. Relationen är

   - Reflexiv: pRp eftersom $p = p^1$ för alla $p \in \mathbb{N}^+$.
   - Antissymetrisk: om pRq och qRp, då har vi att $p = q^k$ och $q = p^j$ med $k, j \geq 1$. Det följer att $p = p^{jk}$. Detta är bara möjligt om äntingen $p = 1$, men då har man $q = p = 1$ eller om $jk = 1$, vilket implicerar $j = k = 1$ och $p = q$.
   - Transitiv: om pRq och qRr så medför det att $q = p^k$ och $r = q^j = p^{jk}$ så pRr.

   Då är R en partialordning på $\mathbb{N}^+$.

5. (a) $a_{n+1} = 2a_n - (n + 1)$
   (b) Låt $P(n)$ vara påståendet att $a_n = 2^n + n + 2$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n \geq 1$.

   - Bassteget: Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 1$. Då gäller det att $a_1 = 5$ enligt uppgiften och $2^1 + 1 + 2 = 2 + 1 + 2 = 5$. $P(n)$ gäller för $n = 1$.
   - Induktionssteget: Anta att $P(k)$ är sant för något $k \geq 1$. Vi ska nu visa att då gäller också att $P(k + 1)$ är sant, dvs att $a_{k+1} = 2^{k+1} + k + 1 + 2$.
     Vi utgår från vänsterledet $a_{k+1} =$ /enligt a)/ $= 2a_k - (k + 1) =$ /induktionsantagandet/ $= 2 * (2^k + k + 2) - (k + 1) = 2^{k+1} + 2k + 4 - k - 1 = 2^{k+1} + k + 3 = 2^{k+1} + k + 1 + 2$.

   Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla heltal $n \geq 1$.

   (c) $a_{10} = 2^{10} + 10 + 2 = 1024 + 12 = 1036$

6. (a) $Q = \{\{5,3\},\{4,1\},\{2\}\}$ och Q är då en partition på A

   (b) Påståendet gäller ibland. Det gäller i a) delen. Det gäller inte om f inte är surjektiv eftersom det då finns element i B sådana att de aldrig förekommer i någon $f(S)$. Tex $A = \{1\}, B = \{2,3\}, f = \{1 \mapsto 2\}, P = \{\{1\}\}$ där P är en partition på A. Men $\{f(S) \mid S \in P\} = \{f(\{1\})\} = \{\{2\}\}$ vilket inte är en partition på B.

   (c) Ja. Låt $A = \{1,2\}, B = \{3\}, P = \{\{1\}\}, f(1) = f(2) = 3$. P är inte en partition på A, men $\{f(S) \mid S \in P\} = \{\{3\}\}$ vilket är en partition på B.