Tentamen i Diskreta strukturer

Kurskod	TDDC75
Datum	2023-10-24
Modul	TEN2

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Om något är otydligt eller om du misstänker fel i någon uppgift kontakta jourlärare, Klervie Toczé, 013284782.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!

1. När en bank beslutar om de ska låna ut pengar till en kund behöver de ta ställning till kundens kreditvärdighet i relation till lånet och säkerheten. Vi förenklar lite och säger att en kund antingen har hög eller låg (dvs inte hög) kreditvärdighet. Antag att en bank har satt upp följande regler (bland flera andra):

   - Om kunden har betalningsanmärkningar så är kreditvärdigheten låg.
   - Om ett lån beviljas till en kund så har kunden hög kreditvärdighet och säkerhet för lånet.
   - Om en kund anses ha hög kreditvärdighet så måste den ha en regelbunden inkomst eller tillräckliga tillgångar.

   (a) Översätt reglerna ovan till satslogiska påståenden.

   (b) Använd en sanningstabell för att visa att det inte finns något fall där kunden har hög kreditvärdighet men inte regelbunden inkomst eller tillräckliga tillgångar. (Det räcker att använda den tredje regeln.)

   (c) Använd satslogisk deduktion och de regler som finns i formelbladet sist i tentan för att bevisa påståendet "Om kunden har beviljats ett lån så har hen inga betalningsanmärkningar".

(5 poäng)

2. Visa eller motbevisa att följande påståenden gäller för alla mängder A och B.

   - $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
   - $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$
   - $A \subseteq 2^A$
   - $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B = B \setminus A$
   - $(A \cup B) \in 2^{A \cap B}$

(5 poäng)

3. Låt $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara definerade enligt $f(x) = x + 1$ och $g(x) = 3x$. Vad blir följande?

   (a) $(g \circ f)(5)$

   (b) $(f \circ g)(5)$

   (c) $(f \circ g)(x)$

   (d) $(g \circ g)(x + 1)$

   (e) $(g \circ f \circ g \circ f)(x)$

(5 poäng)

4. Vi definierar relationen R på $\mathbb{N}^+$ (mängden som består av alla positiva heltal, d.v.s. {1,2,3,...}) som $pRq \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^+, q = p^k$. Visa att R är en partialordning på $\mathbb{N}^+$.

(5 poäng)

5. Man fördelar lasten (d.v.s. ett visst antal ”jobb”) som kommer till en serverhall enligt följande. Första servern får fem jobb. Andra servern får dubbelt så många jobb som den första minus två. Tredje servern får dubbelt så många jobb som den andra minus tre, och så vidare. För alla naturliga tal $n \geq 1$, definierar vi a_n som antalet jobb den n:e servern får.

   (a) För alla naturliga tal $n \geq 1$, uttryck a_{n+1} beroende på a_n.

   (b) Bevisa med hjälp av induktion att $\forall n \geq 1, a_n = 2^n + n + 2$.

   (c) Hur många jobb kommer den 10:e servern få?

(5 poäng)

6. Låt $f : A \to B$ vara en funktion. Vi definierar utvidgningen av f till delmängder av A som $f(S) = \{f(n) \mid n \in S\}$.

   (a) Betrakta först specialfallet där $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och f är definierad som $f(n) = 6 - n$. Betrakta mängden $P = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$ som är en partition på A. Definiera mängden $Q = \{f(S) \mid S \in P\}$. Är Q en partition på A?

   (b) Betrakta det generella fallet där A och B kan vara godtyckliga mängder och $f : A \to B$ en godtycklig funktion. Om vi vet att en mängd $P \subseteq 2^A$ är en partition på A, gäller det då alltid, aldrig eller ibland att mängden $\{f(S) \mid S \in P\}$ är en partition på B?

   (c) Betrakta fortsatt det generella fallet. Är det möjligt att det kan finnas en mängd $P \subseteq 2^A$ sådan att P inte är en partition på A, men mängden $\{f(S) \mid S \in P\}$ ändå är en partition på B?

(5 poäng)

A Formelblad

Regel	Benämning
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$ $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$	De Morgans lagar
$p \land (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \land r$ $p \lor (q \lor r) \Leftrightarrow (p \lor q) \lor r$	Associativa lagarna
$p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$ $p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$	Distributiva lagarna
$p \land p \Leftrightarrow p$ $p \lor p \Leftrightarrow p$	Idempotens
$p \land 1 \Leftrightarrow p$ $p \lor 0 \Leftrightarrow p$	Identitetslagarna
$p \land 0 \Leftrightarrow 0$ $p \lor 1 \Leftrightarrow 1$	Dominans
$p \land \neg p \Leftrightarrow 0$ $p \lor \neg p \Leftrightarrow 1$	Inversa lagarna
$p \land (p \lor q) \Leftrightarrow p$ $p \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$	Absorption
$p \to q \Leftrightarrow \neg p \lor q$	Implikationslagen
$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \land (q \to p)$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \Rightarrow p \to r$	Syllogism
$p \land q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \lor q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \lor q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \land q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser