Lösningsförslag till matematikdelen på tentamen 2015-08-29 i TDDC75 diskreta strukturer

1. (a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} = (A \setminus C) \setminus B$.
   Alltså gäller påståendet alltid.

   (b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \setminus (B \cap C)$.
   Alltsä gäller påståendet alltid.

   (c) $\varnothing \in 2^{A \setminus B}$ eftersom $\varnothing$ är en delmängd av alla mängder. P.s.s gäller $\varnothing \in 2^A$ och $\varnothing \in 2^B$, men därmed gäller $\varnothing \notin 2^A \setminus 2^B$. Alltså gäller inte påståendet. (Man kan även använda två konkreta exempel på mängder och visa samma sak).

2. (a) $R^+ = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle,$
   $\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$.

   (b) Ej reflexiv eftersom $\langle 4,4\rangle \notin R^+$.

   (c) Ej symmetrisk eftersom $\langle 1,4\rangle \in R^+$ men $\langle 4,1\rangle \notin R^+$.

   (d) Ej antisymmetrisk eftersom $\langle 1,2\rangle \in R^+$ och $\langle 2,1\rangle \in R^+$, men 1 och 2 är olika element.

3. (a) $f(\{1,3\}) = \{f(1), f(3)\} = \{5,3\}$.
   $f(A) = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{5,4,3,2,1\}$.

   (b) Vi får $Q = \{f(\{1,3\}), f(\{2,5\}), f(\{4\})\} = \{\{5,3\}, \{4,1\}, \{2\}\}$. Inget element i Q är tomt, alla element i A finns med i något element i Q och inget element i A förekommer i mera än ett element i Q. Alltså är Q en partition på A.

4. (a) Antag att A och B är disjunkta. För att visa att T är en partialordning måste vi visa att T är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv. Vi noterar att T är en relation på $A \cup B$ och att både R och Q är reflexiva, antisymmetriska och transitiva, eftersom de är partialordningar.

   Reflexivitet: Eftersom R är reflexiv så gäller $\langle x,x\rangle \in R$ för alla $x \in A$ och eftersom Q är reflexiv så gäller $\langle x,x\rangle \in Q$ för alla

$x \in B$. Eftersom $T = R \cup Q$ gäller alltså $\langle x, x\rangle \in T$ för alla $x \in A \cup B$, dvs. T är reflexiv.

Antisymmetri: Antag att T inte är antisymmetrisk. Då finns $x, y \in A \cup B$ så att $x \neq y$, $\langle x, y\rangle \in T$ och $\langle y, x\rangle \in T$. Eftersom $R \subseteq A \times A$ och $Q \subseteq B \times B$ så kan inte T innehålla något element $\langle x, y\rangle$ sådant att $x \in A$ och $y \in B$, eller tvärtom. Det följer att både $x \in A$ och $y \in A$ eller både $x \in B$ och $y \in B$. I första fallet gäller då att $\langle x, y\rangle \in R$ och $\langle y, x\rangle \in R$, vilket är omöjligt eftersom R är antisymmetrisk. Det andra fallet är analogt, eftersom även Q är antisymmetrisk. Det är alltså inte möjligt att $x \neq y$, $\langle x, y\rangle \in T$ och $\langle y, x\rangle \in T$. Detta motsäger antagandet, så T måste vara antisymmetrisk.

Transitivet: Kan visas på motsvarande sätt som antisymmetri.

(b) Här räcker det att hitta ett motexempel. Vi väljer $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$, samt definierar $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$ och $Q = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$, vilka båda är partialordningar. Vi får då $T = R \cup Q = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$. Eftersom $\langle 1, 2\rangle \in T$ och $\langle 2, 3\rangle \in T$ men $\langle 1, 3\rangle \notin T$ så är T inte transitiv, och därmed inte en partialordning.

5. Visa med induktion över n att $f(n) = n + 2$ för alla $n \geq 0$.

Basfall: Basfallet är $n = 0$. Vi får $f(n) = f(0) = 2$, enligt definition, och $n + 2 = 0 + 2 = 2$. Alltså gäller $f(n) = n + 2$ för $n = 0$.

Induktion: Antag att $f(k) = k + 2$ för något $k \geq 0$. Vi ska visa att $f(k + 1) = (k + 1) + 2$ gäller. Enligt def. av f får vi

$$f(k + 1) = 2f((k + 1) - 1) - (k + 1) = 2f(k) - k - 1,$$

men $f(k) = k + 2$ enligt induktionshypotesen, så vi får

$$2f(k) - k - 1 = 2(k + 2) - k - 1 = k + 3 = (k + 1) + 2.$$

Vi får alltså att $f(k+1) = (k+1)+2$, vilket avslutar induktionssteget.

Det följer av ovanstående att $f(n) = n + 2$ för alla $n \geq 0$.