# Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

Lösningsförslag 2020-10-26

1. (a)
   - $v \leftrightarrow cv$: Om personen har röstat i vallokal så har rösten från vallokalen räknats och om rösten från vallokalen har räknats så har personen röstat i vallokal.
   - $p \to (cp \vee cv)$: Om personen har poströstats så har poströsten eller rösten från vallokalen räknats.
   - $cv \to \neg cp$: Om rösten från vallokalen har räknats så har inte poströsten räknats.
   - $cp \to p$: Om poströsten har räknats så har personen poströstat.

   (b) Vi visar att $(v \leftrightarrow cv), (p \to (cp \vee cv)) \Rightarrow (\neg cp \wedge p) \to v$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $v \leftrightarrow cv$ | (Premiss) |
| (2) | $p \to (cp \vee cv)$ | (Premiss) |
| (3) | $(v \to cv) \wedge (cv \to v)$ | (1) och ekvivalenslagen |
| (4) | $cv \to v$ | (3) och konjunktiv förenkling |
| (5) | $\neg cp \wedge p$ | (Hypotes) |
| (6) | $p$ | (5) och konjunktiv förenkling |
| (7) | $\neg cp$ | (5) och konjunktiv förenkling |
| (8) | $cp \vee cv$ | (6), (2) och modus ponens |
| (9) | $cv$ | (7), (8) och disjunktiv syllogism |
| (10) | $v$ | (4), (9) och modus ponens |
| (11) | $(\neg cp \wedge p) \to v$ | (5)-(10) och hypotetisk härledning |

2. (a) $VL = \overline{(A \setminus B)} \cap A$ =/differensregeln/= $\overline{(A \cap \overline{B})} \cap A$ = /DeMorgan/ = $(\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap A$ =/dubbel negation/ = $(\overline{A} \cup B) \cap A$ = /distributiva lagen/ = $(\overline{A} \cap A) \cup (A \cap B)$ = /inversa lagen/ = $\varnothing \cup (A \cap B)$ =/identitet/ = $A \cap B = HL$. Påståendet gäller alltid.

   (b) Vi betraktar vänsterledet, $VL = \overline{(A \setminus B)} \cup A$ =/differensregeln/= $\overline{(A \cap \overline{B})} \cup A$ = /DeMorgan/ = $(\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cup A$ =/dubbel negation/ = $(\overline{A} \cup B) \cup A = \overline{A} \cup B \cup A$ = /inversa lagen/ = $\mathcal{U} \cup B$ =/dominans/ = $\mathcal{U}$. Påståendet gäller alltså då $A \cup B = \mathcal{U}$, men inte annars.

   (c) Vi betraktar vänsterledet $((A \cap \overline{A}) \cap B)$ = /inversa lagen/ = $\varnothing \cap B$ = /dominans/ = $\varnothing$. Dvs påståendet gäller om och endast om $\overline{A} \subseteq \varnothing$, dvs ibland.

3. (a) Varje element $f \in C$ är en funktion $f = \{0 \mapsto y_0, 1 \mapsto y_1, 2 \mapsto y_2, 3 \mapsto y_3\}$, där $y_i \in B$. Då är frågan hur många sådana funktioner det finns. För varje $y_i$ finns fyra möjliga värden $a, b, c, d$, och alltså finns det $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ olika funktioner totalt sett.

   (b) För att en funktion $f : A \to B$ ska vara injektiv så måste gälla att $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Det betyder i praktiken att om till exempel $f(0) = a$ så kan inte också $f(1) = a$. Utan att gå in på kombinatorik kan vi helt enkelt räkna upp de möjliga funktionerna, genom att betrakta möjliga värden på $y_0, \ldots, y_3$:

| $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|
| a | b | c | d |
| a | b | d | c |
| a | c | b | d |
| a | c | d | b |
| a | d | b | c |
| a | d | c | b |
| b | a | c | d |
| b | a | d | c |
| b | c | a | d |
| b | c | d | a |
| b | d | a | c |
| b | d | c | a |
| c | b | a | d |
| c | b | d | a |
| c | a | b | d |
| c | a | d | b |
| c | d | b | a |
| c | d | a | b |
| d | b | c | a |
| d | b | a | c |
| d | c | b | a |
| d | c | a | b |
| d | a | b | c |
| d | a | c | b |

   Det finns alltså 24 sådana funktioner. Den som inte vill skriva upp hela tabellen kan också räkna sig fram till att det finns 4 sätt att välja värde för $y_0$, 3 sätt kvar för $y_1$, 2 sätt för $y_2$ och $y_3$ får ta det värde som är kvar, så totalt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ olika injektiva funktioner.

   (c) Här kan vi göra motsvarande resonemang som i a) men istället behöver vi för varje $y \in B$ hitta ett $x \in A$ sådant att $f(x) = y$. Eftersom $f$ är en funktion så kan vi inte välja samma $x$ för två olika $y$, utan får återigen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ olika surjektiva funktioner.

   (d) Nej. Om man betraktar alla funktioner i b-uppgiften så ser man att alla de funktionerna också är surjektiva. Generellt så går det inte eftersom kravet på injektivitet och det faktum att mängderna $A$ och $B$ är lika stora gör att för varje $y \in B$ så finns ett $x \in A$ sådant att $f(x) = y$.

4. Vi behöver visa att $R'$ är en partialordning och därmed reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

   - **Reflexiv:** Låt $y$ vara ett godtyckligt element i $B$, vi ska då visa att $(y, y) \in R'$. Låt $x = f^{-1}(y)$. Vi vet att $x \in A$ och att $R$ är reflexiv så då gäller $(x, x) \in R$. Alltså gäller att $(f^{-1}(y), f^{-1}(y)) \in R$, vilket innebör att $(y, y) \in R'$
   - **Anti-symmetrisk:** Antag att $(y_1, y_2) \in R'$ och att $(y_2, y_1) \in R'$. Vi ska då visa att $y_1 = y_2$. Låt $x_1 = f^{-1}(y_1)$ och $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Från definitionen av $R'$ vet vi att $(x_1, x_2) \in R$ och att $(x_2, x_1) \in R$. Eftersom $R$ är antisymmetrisk gäller då att $x_1 = x_2$. Av detta följer att $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, och eftersom inversen till en bijektion också är en bijektion (och därmed injektiv) så följer att $y_1 = y_2$
   - **Anti-symmetrisk:** Antag att $(y_1, y_2) \in R'$ och att $(y_2, y_3) \in R'$. Vi ska då visa att $(y_1, y_3) \in R'$. Låt $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, och $x_3 = f^{-1}(y_3)$. Från definitionen av $R'$ vet vi att $(x_1, x_2) \in R$ och att $(x_2, x_3) \in R$. Eftersom $R$ är transitiv gäller då att $(x_1, x_3) \in R$. Av detta följer att $(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_3))$, och därmed gäller att $(y_1, y_3) \in R'$.

5. Vi visar detta med hjälp av induktion. Låt $P(n)$ vara påståendet att $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Vi ska visa att $P(n)$ för sant för alla $n \geq 1$.

   - Bassteget: Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 1$. Då gäller att $VL = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1)}{6} = HL$
   - Induktionssteget: Anta att $P(k)$ är sant för något $k \geq 1$.
     Vi ska nu visa att då gäller också att $P(k+1)$ är sant, dvs att $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.
     Vi utgår från vänsterledet $VL = 1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = /\text{ind.antagandet}/ = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(1+k)) = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = HL$

   Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla heltal $n \geq 1$.

6. För att visa att $R_{\Leftrightarrow}$ är en ekvivalensrelation på $F$ ska vi visa att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

   - **Reflexiv:** Låt $f \in F$ vaa en godtycklig satslogisk formel, då gäller $f \Leftrightarrow f$, och alltså $(f, f) \in R_{\Leftrightarrow}$.
   - **Symmetrisk:** Antag att $(f_1, f_2) \in R_{\Leftrightarrow}$. Då vet vi att $f_1$ och $f_2$ är satslogiska formler och att $f_1 \Leftrightarrow f_2$. Av detta följer att $f_2 \Leftrightarrow f_1$ och därmed $(f_2, f_1) \in R_{\Leftrightarrow}$.
   - **Symmetrisk:** Antag att $(f_1, f_2), (f_2, f_3) \in R_{\Leftrightarrow}$. Då vet vi att $f_1$, $f_2$ och $f_3$ är satslogiska formler och att $f_1 \Leftrightarrow f_2$ samt att $f_2 \Leftrightarrow f_3$. Av detta följer ocksp att $f_1 \Leftrightarrow f_3$ och därmed $(f_1, f_3) \in R_{\Leftrightarrow}$.

   Från detta finner vi att $R_{\Leftrightarrow}$ är en ekvivalensrelation på $F$.

# A Formelblad

| **Regel** | **Benämning** |
|---|---|
| $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ | Lagen om dubbel negation |
| $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ | De Morgans lagar |
| $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$<br>$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ | Associativa lagarna |
| $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$<br>$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | Distributiva lagarna |
| $p \wedge p \Leftrightarrow p$<br>$p \vee p \Leftrightarrow p$ | Idempotens |
| $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$<br>$p \vee 0 \Leftrightarrow p$ | Identitetslagarna |
| $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$<br>$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ | Dominans |
| $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$<br>$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$ | Inversa lagarna |
| $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$<br>$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ | Absorption |
| $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ | Implikationslagen |
| $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ | Kontrapositiva lagen |
| $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | Ekvivalenslagen |
| $(p \rightarrow q), p \Rightarrow q$ | Modus ponens |
| $(p \rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p$ | Modus tollens |
| $(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$ | Syllogism |
| $p \wedge q \Rightarrow p$ | Konjunktiv förenkling |
| $p \Rightarrow p \vee q$ | Disjunktiv förstärkning |
| $(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$ | Disjunktiv syllogism |
| $p, q \Rightarrow p \wedge q$ | Konjunktionsregeln |

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser