Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2020-10-26

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Om du misstänker fel i någon uppgift kontakta jourlärare, Mikael Asplund, 0700 895 827.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!

1. Presidentvalet i USA fångar mångas intresse just nu. I debatten har poströster blivit viktiga och det är också ganska vanligt i USA med olika former av elektronisk röstning. Det pågår mycket forskning kring hur elektroniska val kan utformas på ett säkert och tillförlitligt sätt (men det är svårare än man kan tro). Önskvärda egenskaper för valsystemet uttrycks då med logiska formler, vilka är lite för invecklade för att använda som exempel här. Vi betraktar istället ett lite enklare exempel som rör det svenska valsystemet. I Sverige gäller att man kan välja om man vill poströsta eller rösta i vallokal. Det är möjligt att göra båda, och då är det rösten i vallokal som ska räknas. Vi kan formlisera detta genom följande satser (för en given person).

   - v - betyder att personen har röstat i en vallokal
   - cv - betyder att personens röst från vallokalen har räknats (c som i counted) med i valresultatet
   - p - betyder att personen har poströstat
   - cp - betyder att personens poströst har räknats med i valresultatet

   Med dessa satsvariabler kan vi nu uttrycka egenskaper som vi vill ska vara uppfyllda.

   - $v \leftrightarrow cv$
   - $p \to (cp \lor cv)$
   - $cv \to \neg cp$
   - $cp \to p$

   (a) Översätt (tolka) påståendena ovan till naturligt språk.

   (b) Använd deduktion och reglerna i formelbladet för att bevisa att $(\neg cp \land p) \to v$ gäller om egenskaperna ovan är sanna.

   (5p)

2. Låt A och B vara godtyckliga (möjligen tomma) mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Motivera ditt svar tydligt.

   (a) $(A \cap B) = \overline{(A \setminus B)} \cap A$

   (b) $(A \cup B) = \overline{(A \setminus B)} \cup A$

   (c) $\overline{A} \subseteq ((A \cap \overline{A}) \cap B)$

   (5p)

3. Låt $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och $B = \{a, b, c, d\}$. Låt C vara mängden av funktioner från A till B, dvs $C = (A \to B) = \{f \mid f : A \to B\}$.

   (a) Vad är kardinaliteten av C (alltså hur många olika funktioner finns det)?

   (b) Hur många av funktionerna i C är injektiva?

   (c) Hur många av funktionerna i C är surjektiva?

   (d) Finns det någon funktion $f : A \to B$ som är injektiv men inte surjektiv? (Motivera noggrant)

   (5p)

4. En mängd A tillsammans med en relation $R \subseteq A \times A$ som är en partialordning för A kallas för en *pomängd* och skrivs ofta som ett par (A, R). Antag att (A, R) är en icke-tom pomängd, att B är en annan mängd, och antag att det existerar en bijektion $f : A \to B$. Låt $R' \subseteq B \times B$ vara definerad som

$$R' = \{(a, b) \in B \times B \mid (f^{-1}(a), f^{-1}(b)) \in R\}$$

   (obs att inversen till f är väldefinierad eftersom f är en bijektion). Bevisa att (B, R') är en pomängd. (5p)

5. Visa att $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$ för alla heltal $n \geq 1$.

   (5p)

6. Låt F vara en mängd av satslogiska formler och låt

$$R_{\Leftrightarrow} = \{(a, b) \in F \times F \mid a \Leftrightarrow b\}.$$

   Visa att $R_{\Leftrightarrow}$ är en ekvivalensrelation på F.

   (5p)

A Formelblad

Regel	**Benämning**
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Idempotens
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	Absorption
$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \Rightarrow p \to r$	Syllogism
$p \wedge q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser