Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2018-10-23, lösningsförslag

1. (a) Sanningstabell för uttrycken

p	q	r	$p \to q$	$p \vee r$	$\neg r$	$q \to \neg r$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1

Som synes i tabellen så är det bara för rad (tolkningar) 2 och 7 som alla tre premisser är sanna. För båda dessa rader är $p \leftrightarrow q$ sant. Alltså gäller påståendet.

(b) Vi ger två alternativa lösningsgångar:

Kortaste(?) varianten:

(1)	$p \to q$	Premiss
(2)	$p \vee r$	Premiss
(3)	$q \to \neg r$	Premiss
(4)	$\neg\neg r \vee p$	(2) och dubbel negation
(5)	$\neg r \to p$	(4) och implikationslagen
(6)	$q \to p$	(3),(5) och syllogismlagen
(7)	$p \leftrightarrow q$	(1), (6) och ekvivalenslagen

En variant som använder hypotetisk härledning:

(1)		$p \to q$	Premiss
(2)		$p \vee r$	Premiss
(3)		$q \to \neg r$	Premiss
	(4)	q	Hypotes
	(5)	$\neg r$	(4),(3) och modus ponens
	(6)	p	(5),(2) och disjunktiv syllogism
(7)		$p \to q$	(4)-(6) och hypotetisk härledning
(8)		$p \leftrightarrow q$	(1) och (7) och ekvivalenslagen

2. (a) *Bevis.* Vi visar genom en serie omskrivningar (utgående från högerledet):

$$
\begin{array}{ll}
(A \setminus B) \cup B = & \text{[Enl. def. av mängddifferens]} \\
(A \cap \overline{B}) \cup B = & \text{[Distributiva lagen]} \\
(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = & \text{[Inversa lagen]} \\
(A \cup B) \cap \mathcal{U} = & \text{[Identitetslagen]} \\
A \cup B &
\end{array}
$$

□

(b) *Bevis.* Vi visar genom en serie omskrivningar (utgående från högerledet):

$$
\begin{array}{ll}
(A \setminus B) \cup (A \cap B) = & \text{[Enl. def. av mängddifferens]} \\
(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = & \text{[Distributiva lagen]} \\
A \cap (\overline{B} \cup B) = & \text{[Inversa lagen]} \\
A \cap \mathcal{U} = & \text{[Identitetslagen]} \\
A &
\end{array}
$$

□

(c) *Bevis.* Vi börjar med att konstatera att $A \setminus B$ och B är disjunkta mängder. Alltså kan vi skriva

$$|A \cup B| = \text{[Enl. uppgift (a)]} = |(A \setminus B) \cup B| = |A \setminus B| + |B| \qquad (1)$$

Vidare är även $(A \setminus B)$ och $(A \cap B)$ disjunkta, vilket inneär att vi kan uttrycka:

$$|A| = \text{[Enl. uppgift (b)]} = |(A \setminus B) \cup (A \cap B)| = |A \setminus B| + |A \cap B| \qquad (2)$$

Om vi nu tar ekvation (1) och sutraherar ekvation (2) så får vi:

$$|A \cup B| - |A| = |A \setminus B| + |B| - |A \setminus B| - |A \cap B|$$
$$\Leftrightarrow$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

□

3. - $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}$:
    - R_1 är reflexiv eftersom för vaje $a \in \mathbb{N}$ gäller att $a = a$ och därmed $(a,a) \in R_1$.
    - R_1 är transitiv eftersom om $(a,b) \in R_1$ och $(b,c) \in R_1$ så gäller $a = b$ och $b = c$. Då gäller också $a = c$ vilket innebär att $(a,c) \in R_1$.
    - R_1 är symmetrisk eftersom likhet är kommutativ.
    - R_1 är anti-symmetrisk eftersom för alla $(a,b) \in R_1$ så gäller att $a = b$.
  - $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b = b\}$ Vi börjar med att konstatera att

    $$a \cdot b = b \Rightarrow a = 1 \text{ eller } b = 0$$

    Alltså består R_2 av paren $(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), \ldots$ och $(0,0), (1,0), (2,0), \ldots$. Paret $(1,0)$ förekommer förstås bara en gång i mängden.
    - R_2 är inte reflexiv eftersom tex $3 \cdot 3 \neq 3$ och därmed $(3,3) \notin R_2$.
    - R_2 är transitiv eftersom $a \cdot b = b$ och $b \cdot c = c$ medför att $a \cdot c = c$.
    - R_2 är inte symmetrisk eftersom tex $(1,0) \in R_2$ men $(0,1) \notin R_2$
    - R_2 är är anti-symmetrisk eftersom $a \cdot b = b$ och $b \cdot a = a$ medför att $a = b$ (det finns bara två par där detta är sant vilket är $(0,0)$ och $(1,1)$).
  - $R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b + 1\}$ Vi börjar med att konstatera att $a < b + 1 \Leftrightarrow a \leq b$ när $a, b \in \mathbb{N}$.
    - R_3 är reflexiv eftersom tex $a \leq a$ för alla $a \in \mathbb{N}$.
    - R_3 är transitiv eftersom $a \leq b$ och $b \leq c$ medför att $a \leq c$ för alla $a, b, c \in \mathbb{N}$.
    - R_3 är inte symmetrisk eftersom tex $(1,3) \in R_3$ men $(3,1) \notin R_3$.
    - R_3 är är anti-symmetrisk eftersom $a \leq b$ och $b \leq a$ medför att $a = b$.

4. (a) Det symmetriska höljet av R är

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\} \cup \{(1,0),(2,1),(3,2),(0,3)\} \\ &= \{(0,1),(0,3),(1,0),(1,2),(2,1),(2,3),(3,0),(3,2)\} \end{aligned}$$

(b) Det reflexiva höljet av R är

$$\begin{aligned} R^{=} = R \cup id_A &= \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\} \cup \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\} \\ &= \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,0),(3,3)\} \end{aligned}$$

(c) För att beräkna det transitiva höljet av R använder vi den iterativa metoden.

$$\begin{aligned} &S_0 = R = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\} \\ &S_1 = (R \circ S_0) \cup S_0 = \{(0,2),(1,3),(2,0),(3,1)\} \cup \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\} \\ &\quad = \{(0,1),(0,2),(1,2),(1,3),(2,0),(2,3),(3,0),(3,1)\} \\ &S_2 = (R \circ S_1) \cup S_1 = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1), \\ &\quad (2,3),(3,0),(3,1),(3,2)\} \\ &S_3 = (R \circ S_2) \cup S_2 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3), \\ &\quad (2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\} = A \times A \\ &S_4 = (R \circ S_3) \cup S_3 = S_3 \end{aligned}$$

Vi ser att följden har konvergerat till $A \times A$ och därmed gäller att $R^{+} = A \times A$, dvs alla möjliga par från A finns med i transitiva höljet av R.

5. *Bevis.* Vi visar påståendet med hjälp av ett induktionsbevis. Låt $P(n)$ beteckna påståendet att summan av alla element på rad n är 2^n.

   - **Bassteget:** Rad 0 består av sekvensen $a_0 = 1 = 2^0$, alltså gäller $P(0)$.
   - **Induktionssteget:** Antag att $P(k)$ gäller för något $k \in \mathbb{N}$, dvs att summan av alla tal på rad k är $a_0 + \ldots + a_n = 2^k$. Vi ska då visa att även $P(k+1)$ gäller, dvs att summan av alla element på rad $k+1$ är 2^{k+1}.

     Vi börjar med att betrakta sekvensen av tal på rad $k+1$ enligt beskrivningen i uppgiften:

     $$a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n$$

     Om vi summerar dessa tal får vi:

     $$a_0 + a_0 + a_1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n$$

     Vi kan konstatera att varje element a_i från rad k förekommer två gånger i denna summa vilket innebär att vi kan skriva om och använda induktionsantagandet:

     $$\begin{aligned} & a_0 + a_0 + a_1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n \\ &= 2(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \\ &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

     Alltså gäller även $P(k+1)$.

   Enligt Bassteget, Induktionsantagandet och Induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. □

6. (a) Att f är injektiv innebär att för två strängar $s_1, s_2 \in S$ sådana att $s_1 \neq s_2$ så gäller att $f(s_1) \neq f(s_2)$, dvs talen man får av att applicera f på strängarna skiljer sig också åt.

   För att bevisa att f är injektiv behöver man alltså visa att

$$s_1 \neq s_2 \Rightarrow f(s_1) \neq f(s_2)$$

   för alla strängar $s_1, s_2 \in S$. Informellt kan vi tolka varje sträng i S som ett binärt tal där varje A ersätts av 0 och varje B av 1. Så $BBBA = 1110$ vilket vi kan utläsa som talet 14. För att inse att två olika strängar alltid ger två olika tal så behöver vi två argument.

   - För det första kommer kravet att en sträng inte inleds med A (vilket motsvarar 0) innebära att två olika långa strängar alltid motsvarar olika stora tal (den mest signifikanta biten som är längst till vänster kommer alltid att motsvara ett större tal än alla andra bitar i talet).
   - För det andra så kommer två lika långa strängar som som skiljer sig för någon position i strängen också att vara olika stora (av samma skäl som ovan).

   (b) Att f är surjektiv innebär att varje heltal $n \in \mathbb{N}$ kan representeras av en sträng s sådan att $f(s) = n$.

   För att bevisa detta krävs alltså att vi för godtyckligt heltal n kan konstruera en sträng som motsvarar talet. Informellt: för att inse att varje heltal kan representeras som en ett binärtal så kan vi helt enkelt återskapa den mekanism som används för att konvertera ett tal till binär representation. Dela talet med två, om det blir 1 i rest så blir bokstaven längst till höger B, annars A. Upprepa på det som är kvar av divisionen ända tills resultatet blir 0, rest 1, vilket ger ett B som första bokstav i strängen. Formellt bevisas detta m.h.a. ett induktionsbevis.

   (c) För att skapa den önskade bijektionen så kopierar vi f, men har 3 som bas:

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= 0 \\ g(a_n a_{n-1} \dots a_1) &= v(a_1) + 3v(a_2) + 9v(a_3) + \dots + 3^{n-1}v(a_n) \end{aligned}$$

   där $v(A) = 0, v(B) = 1, v(c) = 2$.

A Formelblad

Regel	**Benämning**
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Idempotens
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	Absorption
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Ekvivalenslagen
$(p \rightarrow q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$	Syllogism
$p \wedge q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser