Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer Korrigerad

2018-10-23

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!!!

1. Betrakta följande påstående:

$$(p \to q), (p \vee r), (q \to \neg r) \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

   (a) Använd sanningstabeller för att visa att påståendet är sant. (2p)

   (b) Använd satslogisk deduktion och de regler om finns i formelbladet sist i tentan för att visa påståendet. Tips: Härled först $q \to p$, och använd sedan ekvivalenslagen. (3p)

(5 poäng)

2. Inom sannolikhetsläran används mängder för att modellera händelser. Enkelt uttryckt så kan man säga att sannolikheten för en viss händelse anges som sannolikheten för att ett möjligt utfall ska tillhöra den mängd av möjliga utfall som representerar den händelsen. Det är då användbart att kunna räkna hur många av utfallen som hör till en viss händelsemängd.

   (a) Bevisa att $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ för alla ändliga mängder A och B. (2p)

   (b) Bevisa att $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ för alla ändliga mängder A och B. (2p)

   (c) (Svår) Visa nedanstående med hjälp av (a) och (b) ovan samt det faktum att $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ för alla ändliga mängder X och Y sådana att X och Y är disjunkta.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

   (1p)

(5 poäng)

3. Avgör för relationerna nedan om de är reflexiva, transitiva, symmetriska, eller anti-symmetriska (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Det behövs inte fullständiga bevis, men svaren måste motiveras.

   - $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}$
   - $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b = b\}$
   - $R_3 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b + 1\}$

(5 poäng)

4. Låt mängden $A = \{0,1,2,3\}$ och relationen $R \subseteq A \times A$ vara $R = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\}$ Din uppgift är att ta fram:

   (a) Det symmetriska höljet av R. (1p)

   (b) Det reflexiva höljet av R. (1p)

   (c) Det transitiva höljet av R. (3p)

(5 poäng)

5. Denna uppgift handlar om Pascals triangel. Triangeln skapas genom att varje element utgörs av summan av de två element som är ovanför (snett upp till höger och snett upp till vänster). De första fem raderna i triangeln visas i figuren nedan (där radnumreringen börjar med 0).

rad 0:					1				
rad 1:				1		1			
rad 2:			1		2		1		
rad 3:		1		3		3		1	
rad 4:	1		4		6		4		1

Tabell 1: Första fem raderna i Pascals triangel

Det finns många intressanta egenskaper och tillämpningar av denna i grunden enkla konstruktion, men här nöjer vi oss med att studera vad summan blir i varje rad. Om vi summerar varje rad i figuren ovan får vi $1, 2, 4, 8, 16$. Det verkar som om summan för rad n är 2^n. Din uppgift är att bevisa att detta påstående gäller för alla rader $n \in \mathbb{N}$. För att underlätta något så följer en beskrivning av Pascals triangel som gör påståendet lite enklare att bevisa.

- Varje rad n består av en sekvens av $n + 1$ element.
- Rad 0 består av sekvensen $a_0 = 1$.
- Om rad n består av sekvensen $a_0, \ldots, a_n$ så består rad $n + 1$ av sekvensen $a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n$.

(5 poäng)

6. Betrakta mängden av ändliga strängar bestående av bokstäverna A och B, som inte börjar på bokstaven A. Vi kallar denna mängd av strängar S. Den tomma strängen (som tillhör S) betecknar vi med ϵ och en sträng i S med längden $n \geq 1$ kan beskrivas som $a_n a_{n-1} \ldots a_1$, där $a_i \in \{A, B\}$ och $a_n \neq A$. Vi ska nu undersöka kardinaliteten för denna mängd. Vi börjar med att definiera en funktion $f : S \to \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon) &= 0 && (1)\\
f(a_n a_{n-1} \ldots a_1) &= v(a_1) + 2v(a_2) + 4v(a_3) + \ldots + 2^{n-1} v(a_n) && (2)
\end{aligned}
$$

där $v(A) = 0, v(B) = 1$.

Det går att visa att f är injektiv och surjektiv, och därmed bijektiv. Av detta följer att $|S| = |\mathbb{N}|$.

(a) Beskriv vad det innebär (genom att utgå från definitionen) att f är injektiv. Motivera, utan formellt bevis, varför f är injektiv. (2p)

(b) Beskriv vad det innebär (genom att utgå från definitionen) att f är surjektiv. Motivera, utan formellt bevis, varför f är surjektiv. (2p)

(c) Antag nu att vi lägger till en bokstav C till alfabetet, och låt konstruera mängden T på samma sätt som S ovan men där varje $a_i \in \{A, B, C\}$. Definiera en bijektiv funktion $g : T \to \mathbb{N}$. Du behöver inte bevisa bijektivitet. (1p)

(5 poäng)

A Formelblad

Regel	Benämning
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Idempotens
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	Absorption
$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \Rightarrow p \to r$	Syllogism
$p \wedge q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell 2: Logiska ekvivalenser och konsekvenser